

Réseaux de neurones IFT 780

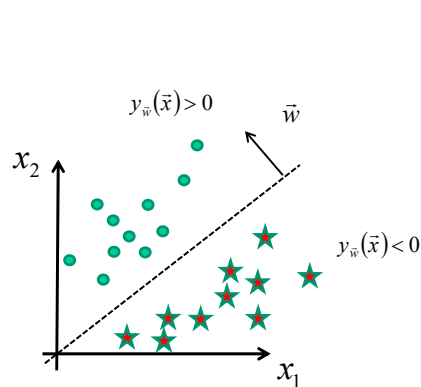
Réseaux de neurones multicouches

Par
Pierre-Marc Jodoin

1

Séparation linéaire

(2D et 2 classes)



$$\begin{aligned} y_{\vec{w}}(\vec{x}) &= \overset{\text{biais}}{w_0} + \overset{\text{poids}}{w_1 x_1} + \overset{\text{poids}}{w_2 x_2} \\ &= w_0 + \vec{w}^T \vec{x} \\ &= \vec{w}'^T \vec{x}' \end{aligned}$$

$$y_{\vec{w}}(\vec{x}) = \vec{w}^T \vec{x}$$

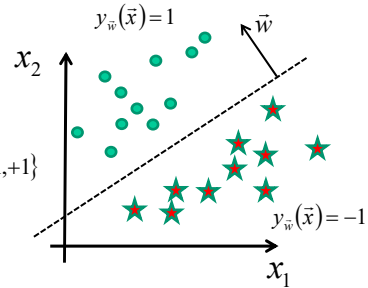
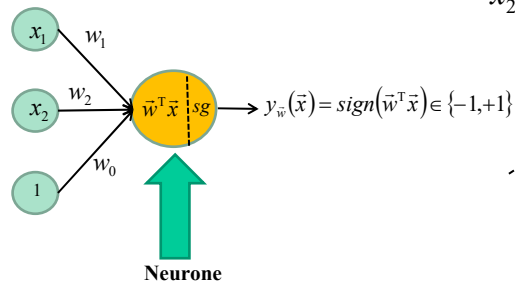
Par simplicité

2 grands **avantages**. Une fois l'entraînement terminé,

1. Plus besoin de données d'entraînement
2. Classification est très rapide (**produit scalaire** entre 2 vecteurs)

2

Perceptron (2D et 2 classes)



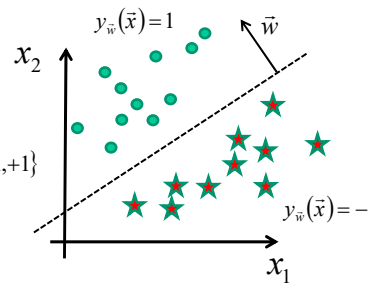
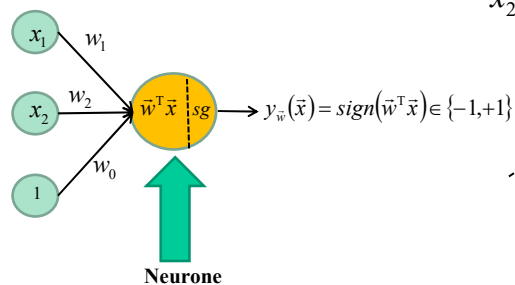
Fonction de coût perceptron (loss)
et gradient

$$E_D(\vec{w}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}_n \in M} -t_n \vec{w}^T \vec{x} \quad \text{où } M \text{ est l'ensemble des données mal classées}$$

$$\nabla E_D(\vec{w}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}_n \in M} -t_n \vec{x}_n$$

3

Hinge Loss (2D et 2 classes)



Fonction de coût SVM (*hinge loss*)
et gradient

$$E_D(\vec{w}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \max(0, 1 - t_n \vec{w}^T \vec{x})$$

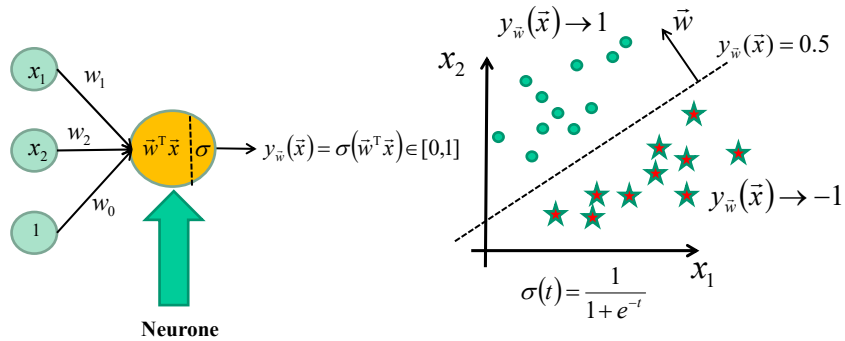
$$\nabla E_D(\vec{w}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}_n \in M} -t_n \vec{x}_n$$

4

Régression logistique

(2D, 2 classes)

Nouvelle fonction d'activation : **sigmoïde logistique**



Fonction de coût (loss)
et gradient

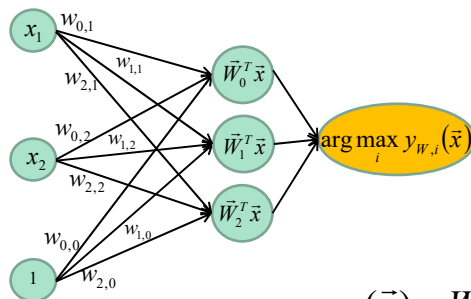
$$E_D(\bar{W}) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_n \ln(y_{\bar{W}}(\bar{x}_n)) + (1 - t_n) \ln(1 - y_{\bar{W}}(\bar{x}_n))$$

$$\nabla E_D(\bar{W}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_{\bar{W}}(\bar{x}_n) - t_n) \bar{x}_n$$

5

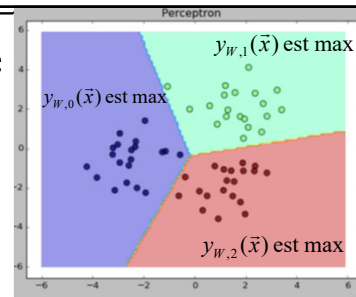
Perceptron Multiclasse

(2D et 3 classes)



$$y_{\bar{W}}(\bar{x}) = \bar{W}^T \bar{x}$$

$$y_{\bar{W}}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & w_{0,2} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & w_{1,2} \\ w_{2,0} & w_{2,1} & w_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

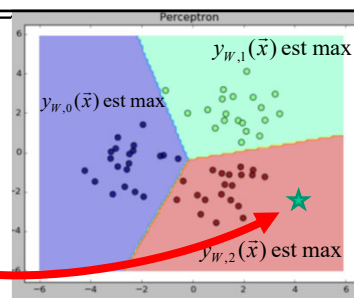


6

Perceptron Multiclasse

Exemple

★ (1.1, -2.0)



$$y_w(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -2 & -3.6 & 0.5 \\ -4 & 2.4 & 4.1 \\ -6 & 4 & -4.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.9 \\ -9.6 \\ 8.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Classe 0} \\ \text{Classe 1} \\ \text{Classe 2} \end{matrix}$$

7

Perceptron Multiclasse

Fonction de coût (*Perceptron loss – One-VS-One*)

$$E_D(W) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}_n \in M} (\vec{W}_j^T \vec{x}_n - \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n)$$

Somme sur l'ensemble des données mal classées

Score de la bonne classe

Score de la classe faussement prédite par le modèle

8

Perceptron Multiclasse

Fonction de coût (*Perceptron loss – One-VS-One*)

$$E_D(W) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}_n \in \mathcal{M}} \underbrace{(\vec{W}_j^T \vec{x}_n - \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n)}_{E_{\vec{x}_n}}$$

$$\nabla_{W_j} E_{\vec{x}_n} = \vec{x}_n$$

$$\nabla_{W_{t_n}} E_{\vec{x}_n} = -\vec{x}_n$$

$$\nabla_{W_i} E_{\vec{x}_n} = 0 \quad \nabla i \neq j \text{ et } t_n$$

9

Perceptron Multiclasse one-vs-one

Descente de gradient stochastique (version naïve, batch_size = 1)

```
Initialiser W
k=0, i=0
DO k=k+1
  FOR n = 1 to N
     $j = \arg \max W^T \vec{x}_n$ 
    IF  $j \neq t_i$  THEN /* donnée mal classée */
       $\vec{w}_j = \vec{w}_j - \eta \vec{x}_n$ 
       $\vec{w}_{t_n} = \vec{w}_{t_n} + \eta \vec{x}_n$ 
  UNTIL toutes les données sont bien classées.
```

10

Perceptron Multiclasse one-vs-one

Exemple d'entraînement ($\eta=1$)

$$\vec{x}_n = (0.4, -1), t_n = 0$$

$$y_w(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 3.6 & 0.5 \\ -4 & 2.4 & 4.1 \\ -6 & 4 & -4.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -7.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Classe 0
Classe 1
Classe 2

FAUX!

11

11

Perceptron Multiclasse

Exemple d'entraînement ($\eta=1$)

$$\vec{x}_n = (0.4, -1.0), t_n = 0$$

$$\vec{w}_0 \leftarrow \vec{w}_0 + \vec{x}_n \quad \begin{bmatrix} -2.0 \\ 3.6 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 4.0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 \leftarrow \vec{w}_2 - \vec{x}_n \quad \begin{bmatrix} -6.0 \\ 4.0 \\ -4.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.0 \\ 3.6 \\ -3.9 \end{bmatrix}$$

12

12

Hinge Multiclasse

Fonction de coût (**Hinge loss** ou **SVM loss – One vs one**)

$$E_D(W) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}_n \in M} \max(0, 1 + \vec{W}_j^T \vec{x}_n - \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n)$$

Somme sur l'ensemble des
Données mal classées

Score de la mauvaise classe prédite

Score de la bonne classe

13

Hinge Multiclasse

Fonction de coût (**Hinge loss** ou **SVM loss – One vs One**)

$$E_D(W) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}_n \in M} \underbrace{\max(0, 1 + \vec{W}_j^T \vec{x}_n - \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n)}_{E_{\vec{x}_n}}$$

$$\nabla_{W_{t_n}} E_{\vec{x}_n} = \begin{cases} -\vec{x}_n & \text{si } \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n < \vec{W}_j^T \vec{x}_n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\nabla_{W_j} E_{\vec{x}_n} = \begin{cases} \vec{x}_n & \text{si } \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n < \vec{W}_j^T \vec{x}_n + 1 \text{ et } j \neq t_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

14

Hinge Multiclasse one-vs-one

Descente de gradient stochastique (version naïve, batch_size = 1)

```
Initialiser  $\mathbf{W}$ 
k=0, i=0
DO k=k+1
  FOR n = 1 to N
    IF  $\bar{w}_{i_n}^T \tilde{x}_n < \bar{w}_j^T \tilde{x}_n + 1$  THEN
       $\bar{w}_{i_n} = \bar{w}_{i_n} + \eta \tilde{x}_n$ 
       $\bar{w}_j = \bar{w}_j - \eta \tilde{x}_n$ 
  UNTIL toutes les données sont bien classées.
```



Au TP1, implanter cette version « naïve »

15

Hinge Multiclasse

Fonction de coût (**Hinge loss** ou **SVM loss – One vs all**)

$$E_D(W) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_j \max(0, 1 + \bar{w}_j^T \tilde{x}_n - \bar{w}_{t_n}^T \tilde{x}_n)$$

Somme sur l'ensemble des données

Score d'une mauvaise classe

Score de la bonne classe

16

Hinge Multiclasse

Fonction de coût (**Hinge loss** ou **SVM loss – One vs all**)

$$E_D(W) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\sum_j \max(0, 1 + \vec{W}_j^T \vec{x}_n - \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n)}_{E_{\vec{x}_n}}$$

$$\nabla_{\vec{W}_{t_n}} E_{\vec{x}_n} = \begin{cases} -\vec{x}_n & \text{si } \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n < \vec{W}_j^T \vec{x}_n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\nabla_{\vec{W}_j} E_{\vec{x}_n} = \begin{cases} \vec{x}_n & \text{si } \vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n < \vec{W}_j^T \vec{x}_n + 1 \text{ et } j \neq t_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

17

Hinge Multiclasse one-vs-all

Descente de gradient stochastique (version naïve, batch_size = 1)

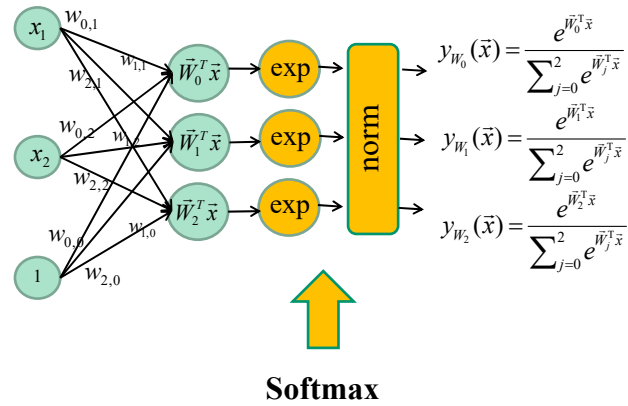
```
Initialiser W
k=0, i=0
DO k=k+1
  FOR n = 1 to N
    IF  $\vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n < \vec{W}_j^T \vec{x}_n + 1$  THEN
       $\vec{W}_{t_n} = \vec{W}_{t_n} + \eta \vec{x}_n$ 

      FOR j=1 to NB_CLASSES THEN
        IF  $\vec{W}_{t_n}^T \vec{x}_n < \vec{W}_j^T \vec{x}_n + 1$  AND  $j \neq t_n$  THEN
           $\vec{W}_j = \vec{W}_j - \eta \vec{x}_n$ 

      UNTIL toutes les données sont bien classées.
```

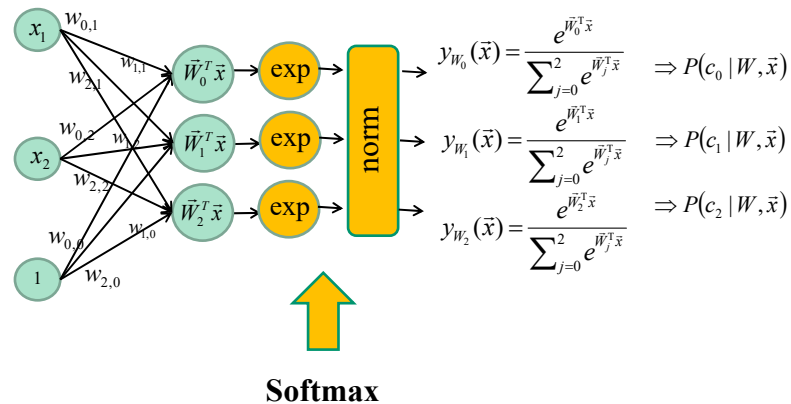
18

Régression logistique multiclasse



19

Régression logistique multiclasse



20

Régression logistique multiclasse

airplane		'airplane' $\Rightarrow t = [1000000000]$
automobile		'automobile' $\Rightarrow t = [0100000000]$
bird		'bird' $\Rightarrow t = [0010000000]$
cat		'cat' $\Rightarrow t = [0001000000]$
deer		'deer' $\Rightarrow t = [0000100000]$
dog		'dog' $\Rightarrow t = [0000010000]$
frog		'frog' $\Rightarrow t = [0000001000]$
horse		'horse' $\Rightarrow t = [0000000100]$
ship		'ship' $\Rightarrow t = [0000000010]$
truck		'truck' $\Rightarrow t = [0000000001]$

Étiquettes de classe : **one-hot vector**

21

Régression logistique multiclasse

Fonction de coût est une **entropie croisée** (*cross entropy loss*)

$$E_D(W) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K t_{kn} \ln y_{W_k}(\vec{x}_n)$$

$$\nabla E_D(W) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \vec{x}_n (y_W(\vec{x}_n) - \vec{t}_n)^T$$

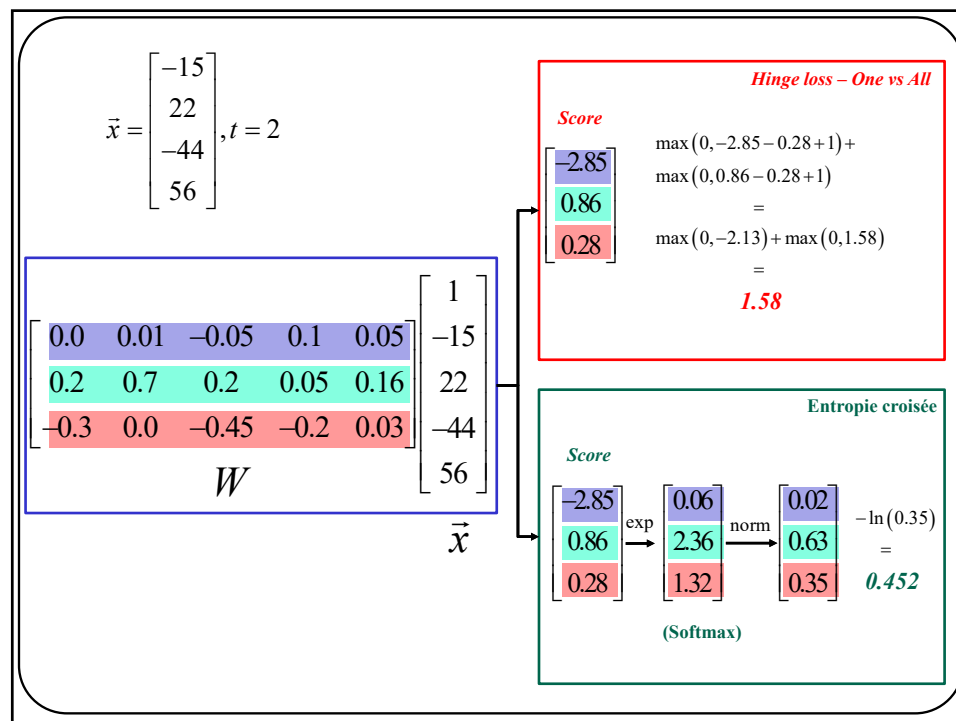
22

Tous les détails du gradient de l'entropie croisée :

info.usherbrooke.ca/pmjodoin/cours/ift603/softmax_grad.html

Au tp1: implanter une **version naïve** avec des boucles for et une **version vectorisée SANS boucle for**.

23



Maximum *a posteriori*

Régularisation

$$\arg \min_W = E_D(W) + \lambda R(W)$$

Fonction de perte (pointing to $E_D(W)$)
Constante (pointing to λ)
Régularisation (pointing to $R(W)$)

En général L1 ou L2 $R(W) = \|W\|_1$ ou $\|W\|_2$

25

Optimisation

Descente de gradient

$$w^{[k+1]} = w^{[k]} - \eta^{[k]} \nabla E$$

↗ Gradient de la fonction de coût
 ↘ Taux d'apprentissage ou "learning rate".

Descente de gradient stochastique

```

Initialiser w
k=0
FAIRE k=k+1
    FOR n = 1 to N
        w = w - η[k] ∇E(x̃n)
    JUSQU'À ce que toutes les données
    soient bien classées ou k==MAX_ITER
    
```

Optimisation par *Batch*

```

Initialiser w
k=0
FAIRE k=k+1
    w = w - η[k] ∑i ∇E(x̃i)
    JUSQU'À ce que toutes les données
    sont bien classées ou k==MAX_ITER
    
```

Parfois $\eta^{[k]} = cst / k$

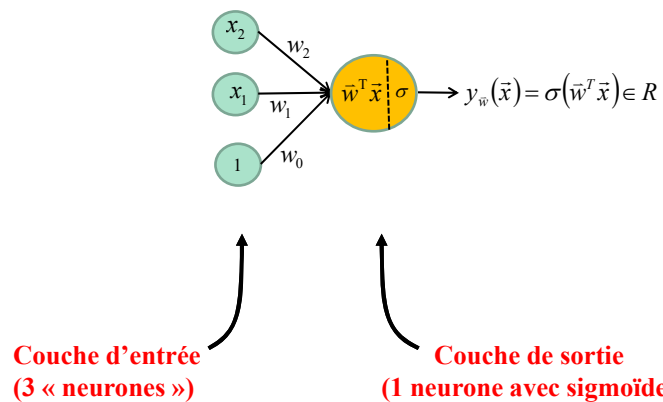
26

Maintenant, rendons le réseau
profond

Maintenant, rendons le réseau

27

2D, 2Classes, Régression logistique linéaire

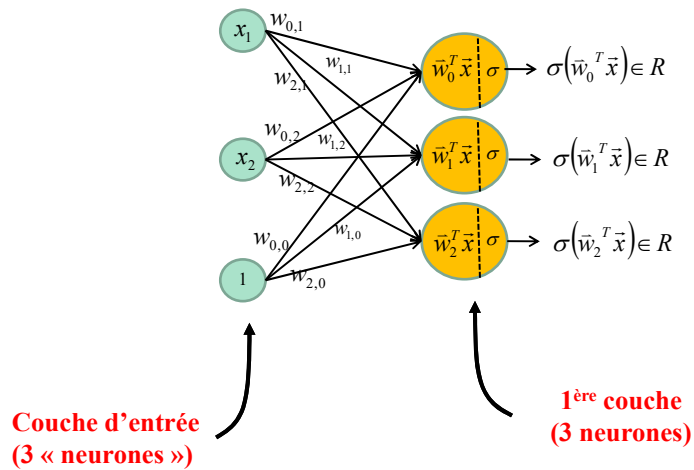


28

28

2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée

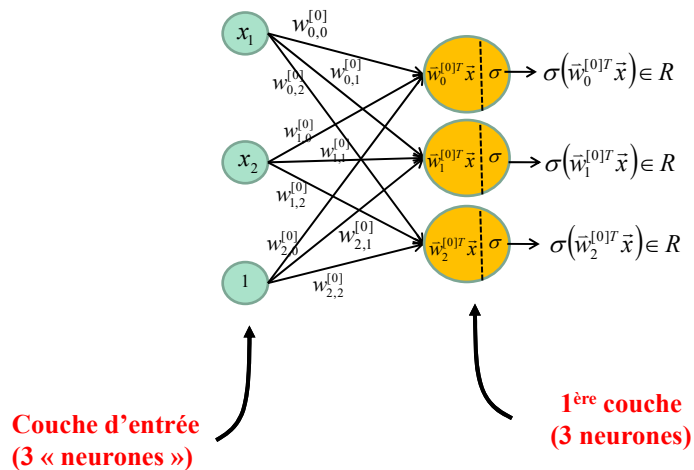
Maintenant, ajoutons arbitrairement 3 neurones



29

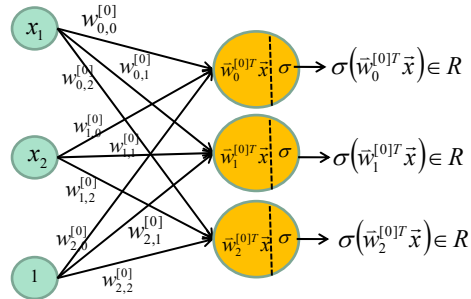
2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée

Puisque les poids sont entre la couche d'entrée et la première couche on va les identifier à l'aide de l'indice [0]



30

2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée

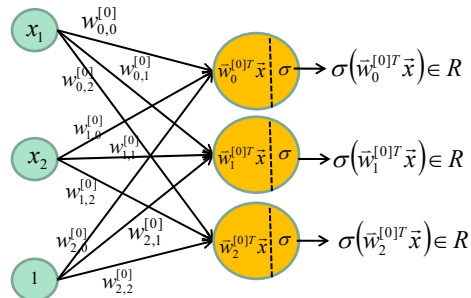


NOTE: à la sortie de la première couche, on a 3 réels calculés ainsi

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} w_{0,0}^{[0]} & w_{0,1}^{[0]} & w_{0,2}^{[0]} \\ w_{1,0}^{[0]} & w_{1,1}^{[0]} & w_{1,2}^{[0]} \\ w_{2,0}^{[0]} & w_{2,1}^{[0]} & w_{2,2}^{[0]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

31

2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée



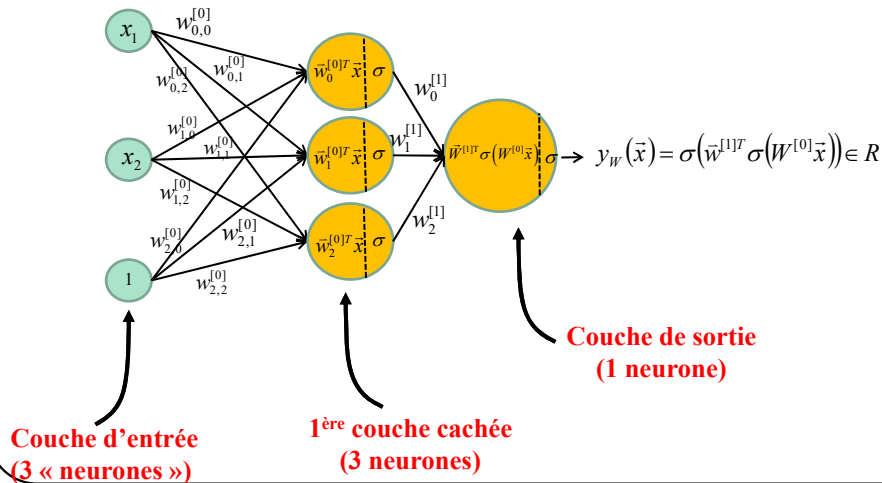
NOTE: représentation plus simple de la sortie de la 1^{ère} couche (3 réels)

$$\sigma(W^{[0]}\vec{x})$$

32

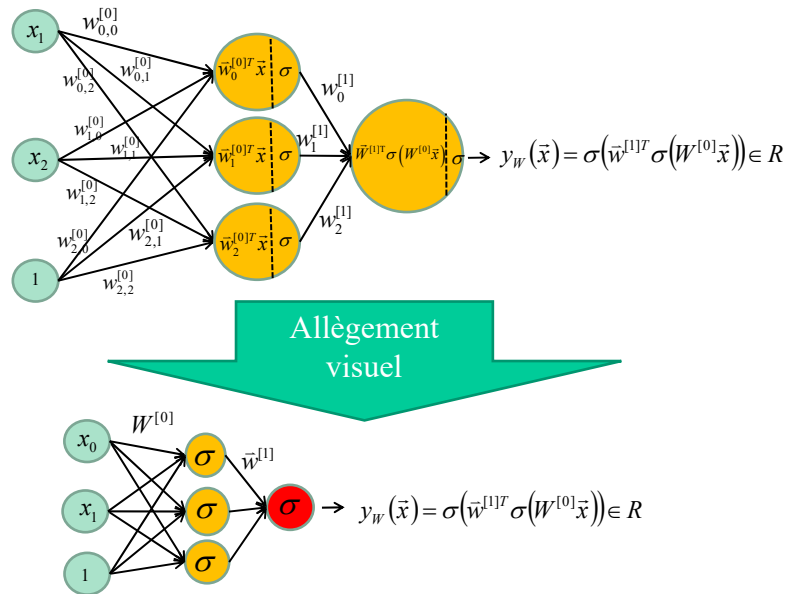
2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée

Si on veut effectuer une **classification 2 classes** via une **régression logistique** (donc **une fonction coût par « entropie croisée »**) on doit ajouter **un neurone de sortie**.



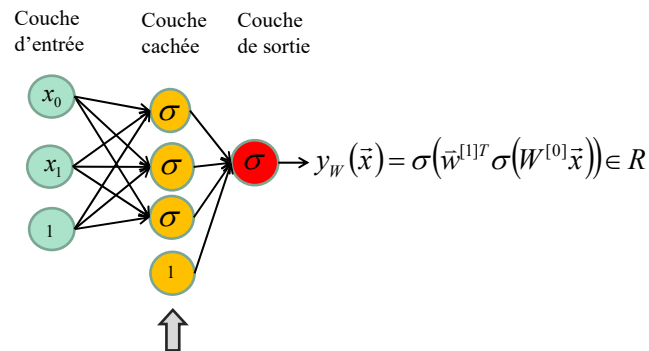
33

2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée



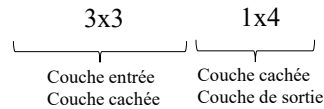
34

2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée



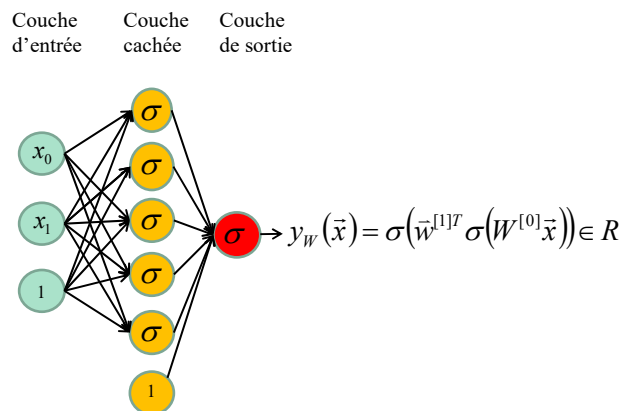
Très souvent, on ajoute un neurone de biais à la couche cachée.

Ce réseau possède au total **13 paramètres**



35

2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée



Plus on augmente le nombre de neurones dans la couche cachée, plus on **augmente la capacité du système**.

Ce réseau a $5 \times 3 + 1 \times 6 = 21$ **paramètres**

36

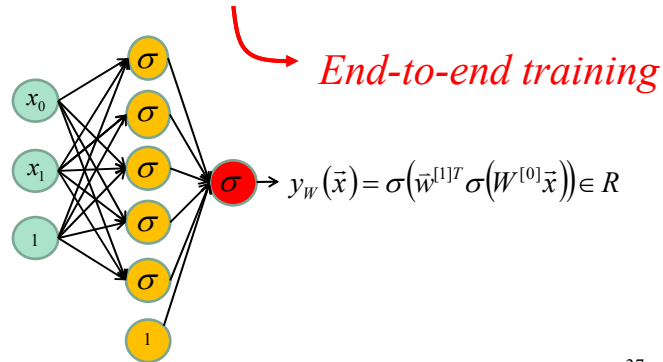
36

NOTE Importante

Le but de la première couche est de **projeter les données d'entrée** (ici $\vec{x} \in R^2$) vers un espace dimensionnel plus grand (ici $\sigma(W^{[0]}\vec{x}) \in R^5$) là où les **classes sont linéairement séparables**.

Car il ne faut pas oublier que la **couche de sortie** est une **régression logistique linéaire**.

Par conséquent, au lieu de fixer nous même la fonction de base, on laisse le **réseau l'apprendre**.

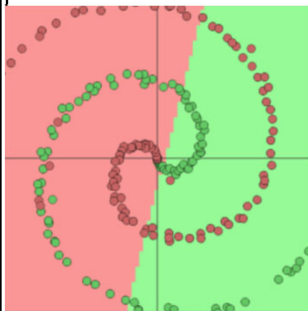


37

37

Nombre de neurones VS Capacité

Aucun neurone caché



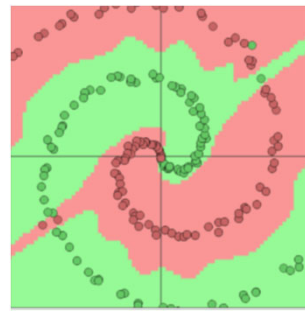
Classification linéaire
Underfitting
(pas assez de capacité)

12 neurones cachés



Classification non linéaire
BON RÉSULTAT
(bonne capacité)

60 neurones cachés

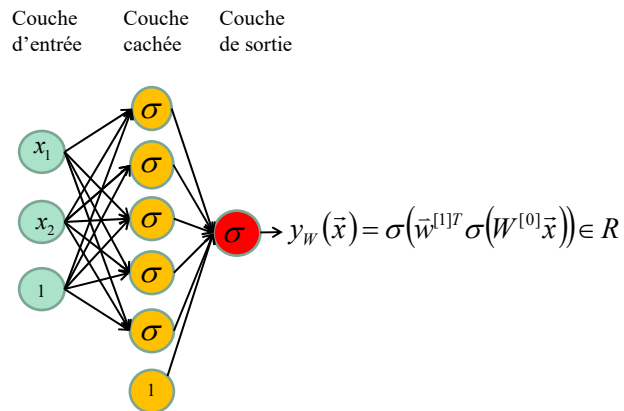


Classification non linéaire
Over fitting
(trop grande capacité)

<http://cs.stanford.edu/people/karpathy/convnetjs/demo/classify2d.html>

38

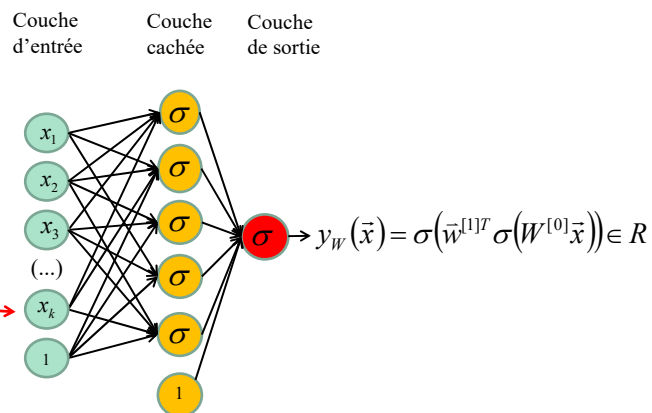
2D, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée



39

39

kD, 2Classes, Réseau à 1 couche cachée



Ou peut facilement augmenter la dimensionnalité des données d'entrée.
Cela n'a pour effet que **d'augmenter le nombre de colonnes dans $W^{[0]}$**

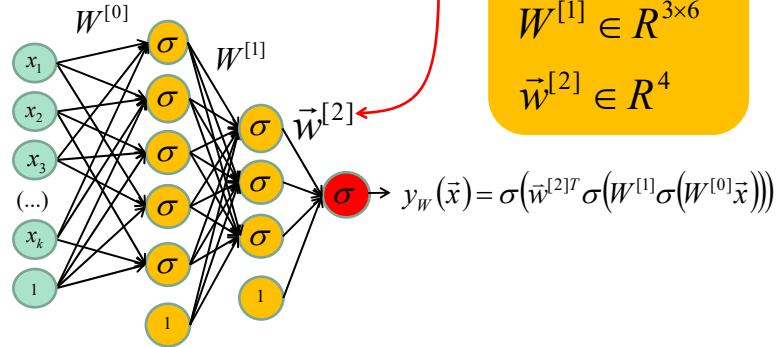
Ce réseau a $5 \times (k+1) + 1 \times 6$ **paramètres**

40

40

kD, 2Classes, Réseau à **2 couches** cachées

Couche d'entrée Couche cachée 1 Couche cachée 2 Couche de sortie



En ajoutant une couche cachée, on ajoute une multiplication matricielle

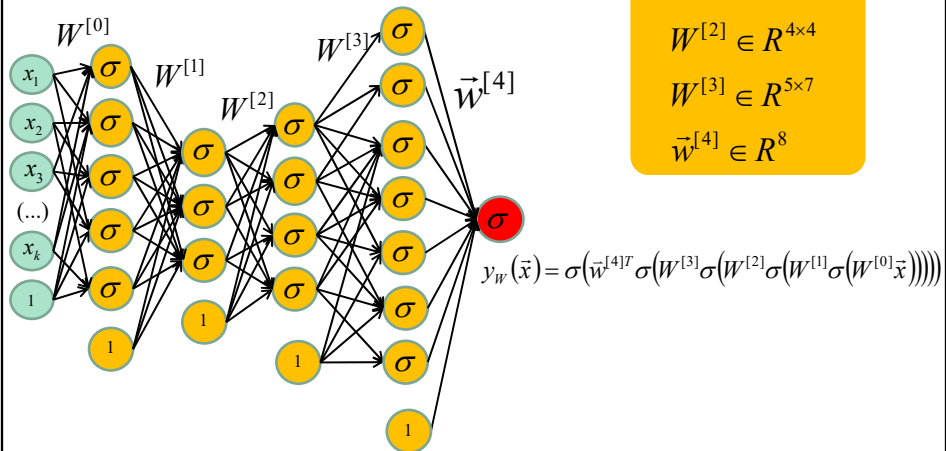
Ce réseau a $5x(k+1)+6x3 + 1x4$ **paramètres**

41

41

kD, 2 Classes, Réseau à 4 couches cachées

Couche d'entrée Couche cachée 1 Couche cachée 2 Couche cachée 3 Couche cachée 4 Couche de sortie

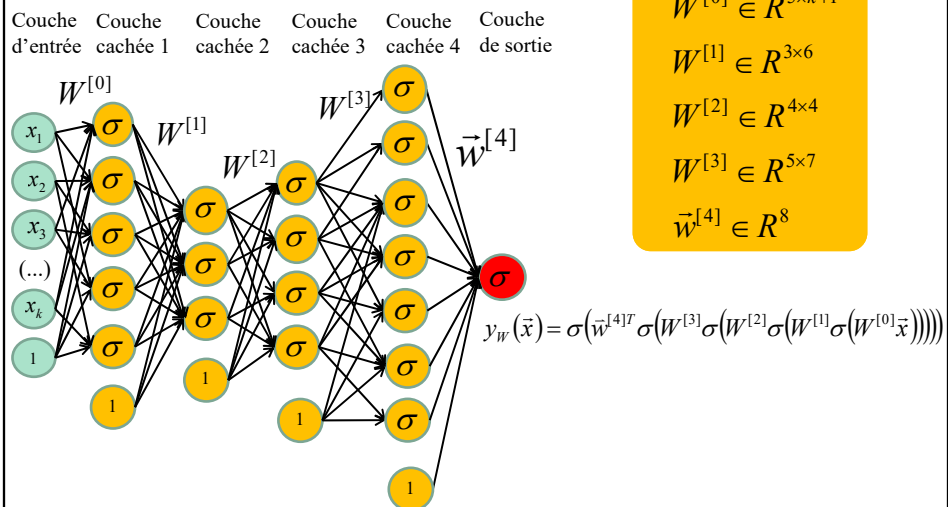


Ce réseau a $5x(k+1)+6x3 + 4x4+7x5+1x8$ **paramètres**

42

42

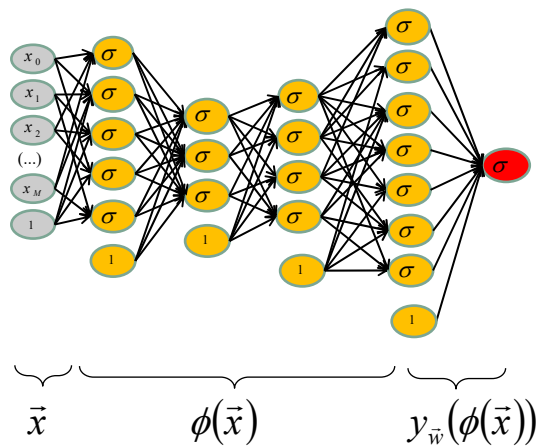
kD, 2 Classes, Réseau à 4 couches cachées



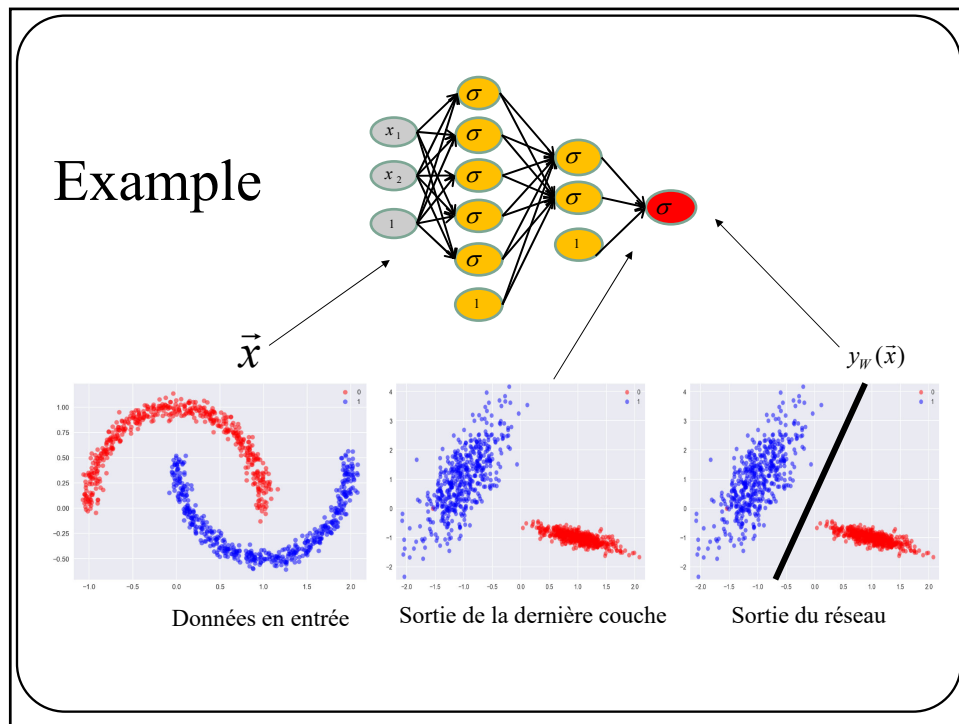
NOTE : plus on augmente le nombre de couches, plus le réseau devient **profond** et plus on **augmente la capacité** du réseau.

43

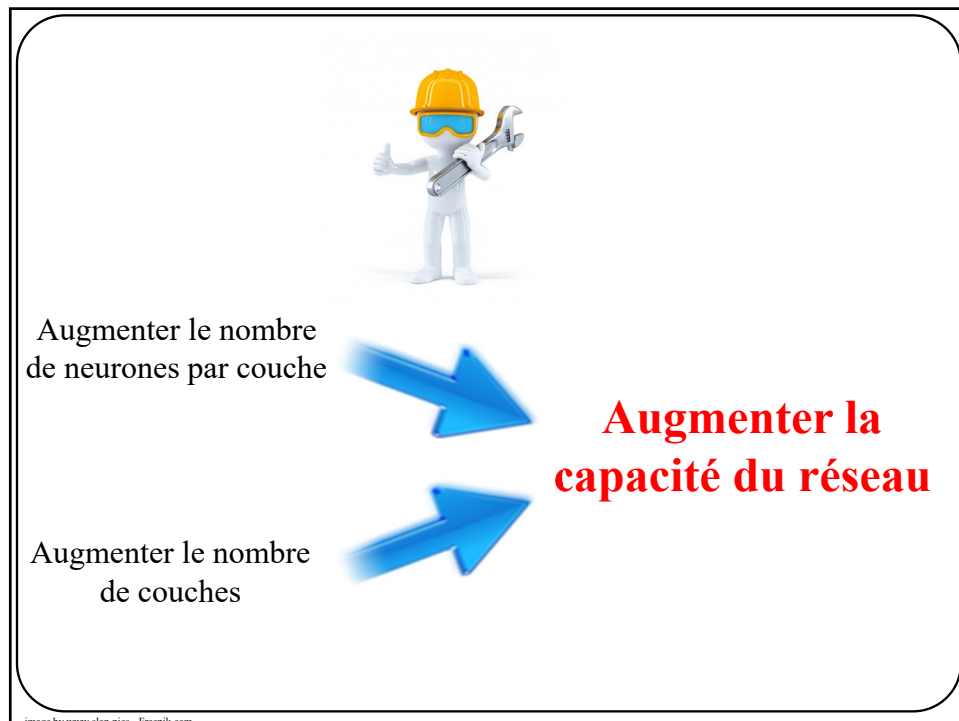
Réseau de neurones multicouches = apprendre une fonction de base



44



45



46



Augmenter la capacité d'un réseau
peut entraîner du **sur-apprentissage**

47

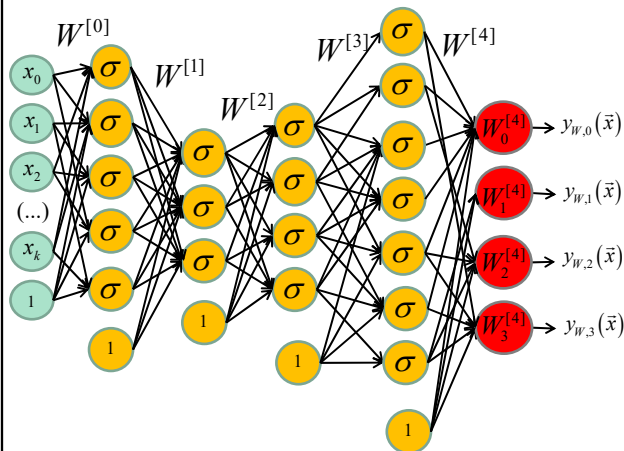


Lorsqu'un réseau doit
prédire **plus de 2 classes**,
on lui assigne **K neurones**
de sortie, une par classe.

48

kD, 4 Classes, Réseau à 4 couches cachées

Couche d'entrée Couche cachée 1 Couche cachée 2 Couche cachée 3 Couche cachée 4 Couche de sortie



$$W^{[0]} \in \mathbb{R}^{5 \times k+1}$$

$$W^{[1]} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$$

$$W^{[2]} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

$$W^{[3]} \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$$

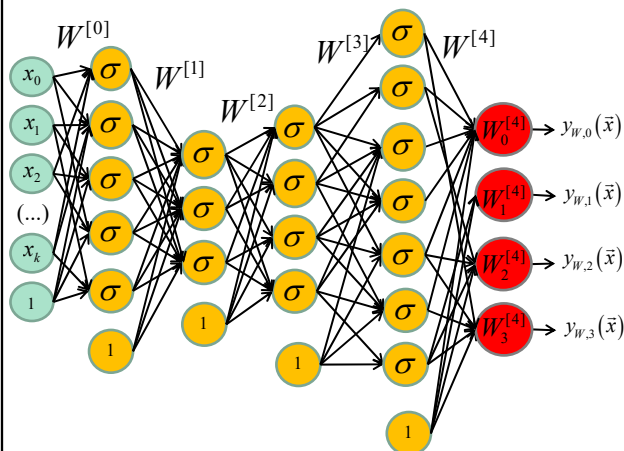
$$W^{[4]} \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$$

$$y_w(\vec{x}) = W^{[4]} \sigma \left(W^{[3]} \sigma \left(W^{[2]} \sigma \left(W^{[1]} \sigma \left(W^{[0]} \vec{x} \right) \right) \right) \right)$$

49

kD, 4 Classes, Réseau à 4 couches cachées

Couche d'entrée Couche cachée 1 Couche cachée 2 Couche cachée 3 Couche cachée 4 Couche de sortie

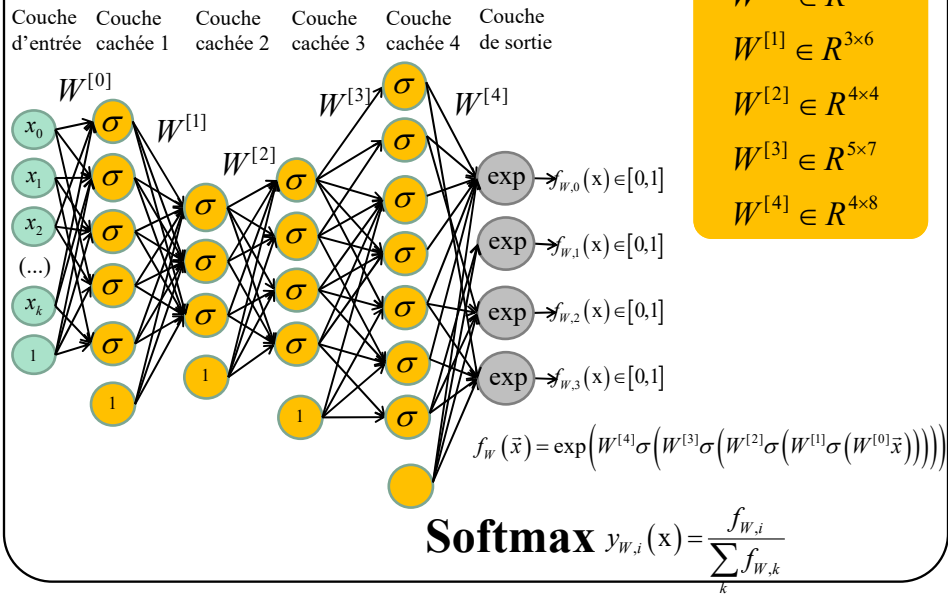


Hinge loss

$$y_w(\vec{x}) = W^{[4]} \sigma \left(W^{[3]} \sigma \left(W^{[2]} \sigma \left(W^{[1]} \sigma \left(W^{[0]} \vec{x} \right) \right) \right) \right)$$

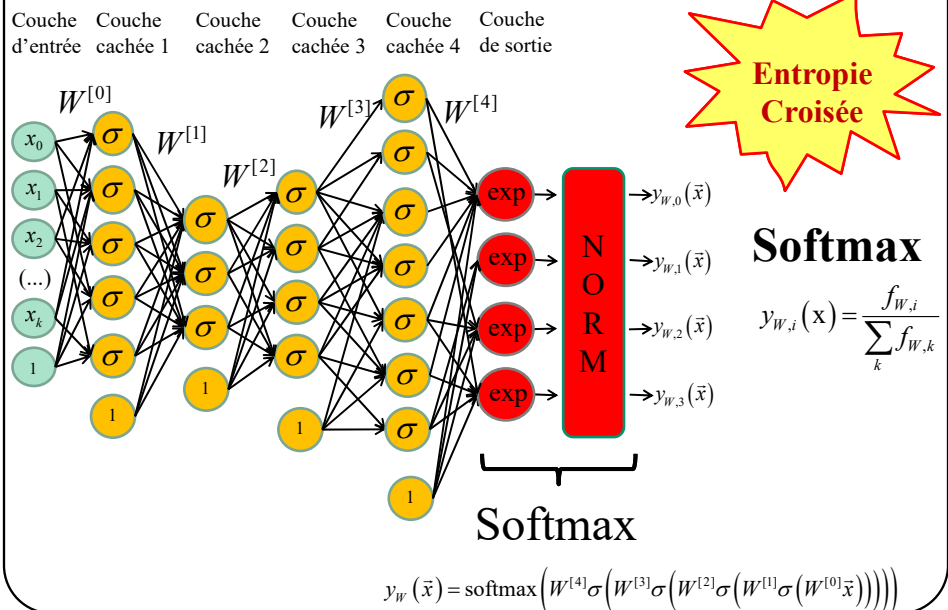
50

kD, 4 Classes, Réseau à 4 couches cachées



51

kD, 4 Classes, Réseau à 4 couches cachées



52

Simulation

<http://cs.stanford.edu/people/karpathy/convnetjs/demo/classify2d.html>

53

Comment faire une prédiction?

Ex.: faire transiter un signal de **l'entrée à la sortie**
d'un réseau à **3 couches cachées**

```
import numpy as np

def sigmoid(x):
    return 1.0 / (1.0+np.exp(-x))

x = np.insert(x,0,1) # Ajouter biais

H1 = sigmoid(np.dot(W0,x))
H1 = np.insert(H1,0,1) # Ajouter biais } Couche 1

H2 = sigmoid(np.dot(W1,H1))
H2 = np.insert(H2,0,1) # Ajouter biais } Couche 2

H3 = sigmoid(np.dot(W2,H2))
H3 = np.insert(H3,0,1) # Ajouter biais } Couche 3

y_pred = np.dot(W3,H3) } Couche sortie
```

Forward pass

54

Comment optimiser les paramètres?

0- Partant de

$$W = \arg \min_W E_D(W) + \lambda R(W)$$

Trouver une fonction de régularisation. En général

$$R(W) = \|W\|_1 \text{ ou } \|W\|_2$$

55

55

Comment optimiser les paramètres?

1- Trouver une loss $E_D(W)$ comme par exemple

Hinge loss

Entropie croisée (*cross entropy*)



N'oubliez pas d'ajuster la sortie du réseau en fonction de la loss que vous aurez choisi.

cross entropy => Softmax

56

Comment optimiser les paramètres?

2- Calculer le gradient de la loss par rapport à chaque paramètre

$$\frac{\partial (E_D(W) + \lambda R(W))}{\partial w_{a,b}^{[c]}}$$

et lancer un algorithme de descente de gradient pour mettre à jour les paramètres.

$$w_{a,b}^{[c]} = w_{a,b}^{[c]} - \eta \frac{\partial (E_D(W) + \lambda R(W))}{\partial w_{a,b}^{[c]}}$$

57

57

Comment optimiser les paramètres?

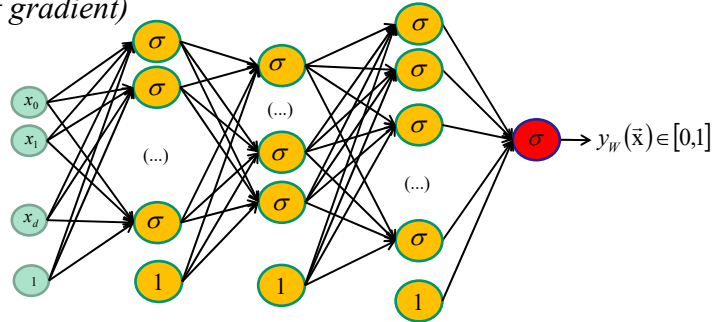
$$\frac{\partial (E_D(W) + \lambda R(W))}{\partial w_{a,b}^{[c]}} \Rightarrow \text{calculé à l'aide d'une rétropropagation}$$

58

58

Disparition du gradient

(vanishing gradient)



Malheureusement, l'entraînement d'un **réseau profond** avec **rétro-propagation** et des fonctions d'activations **sigmoïdales** entraîne des problèmes de

disparition du gradient

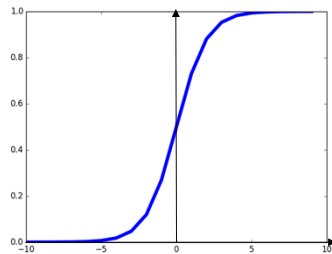
59

59

On résoud le problème de la
disparition du gradient à l'aide
d'autres fonctions d'activations

60

Fonction d'activation



Sigmoïde

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

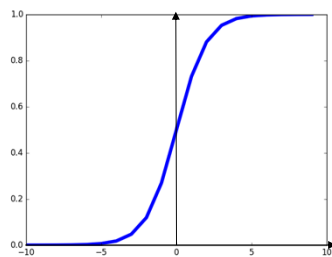
- Ramène les valeurs entre 0 et 1
- Historiquement populaire

3 Problèmes :

- Un neurone saturé a pour effet de « **tuer** » les **gradients**

61

Fonction d'activation



Sigmoïde

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

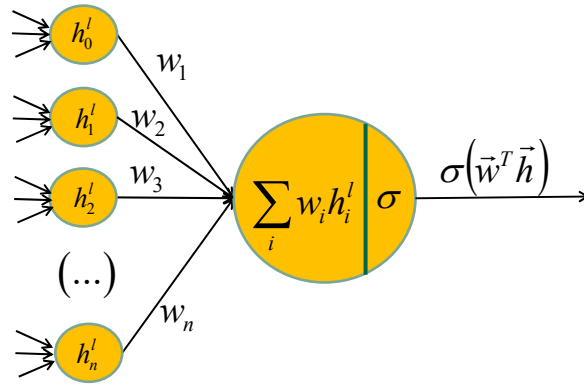
- Ramène les valeurs entre 0 et 1
- Historiquement populaire

3 Problèmes :

- Un neurone saturé a pour effet de « **tuer** » les **gradients**
- Sortie d'une sigmoïde n'est **pas centrée à zéro**.

62

Qu'arrive-t-il lorsque le vecteur d'entrée \vec{h} d'un neurone est toujours positif?

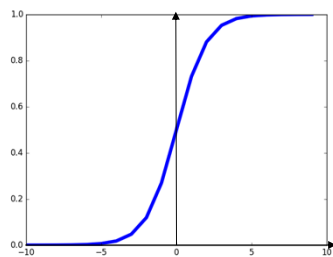


Le gradient par rapport à \vec{w} est ... **Positif? Négatif?**

Réponse : <https://rohanvarma.me/inputnormalization/>

63

Fonction d'activation



Sigmoïde

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

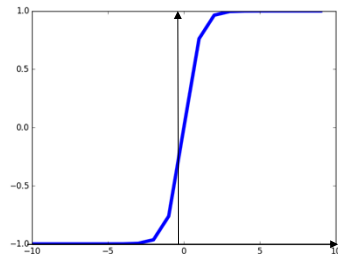
- Ramène les valeurs entre 0 et 1
- Historiquement populaire

3 Problèmes :

- Un neurone saturé a pour effet de « **tuer** » les **gradients**
- Sortie d'une sigmoïde n'est **pas centrée à zéro**.
- $\exp()$ est **coûteux** lorsque le nombre de neurones est élevé.

64

Fonction d'activation



Tanh(x)

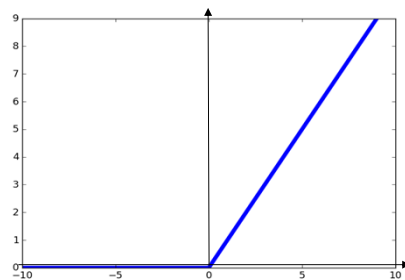
- Ramène les valeurs entre -1 et 1
- **Sortie centrée à zéro** 😊
- **Disparition du gradient** lorsque la fonction sature ☹️

[LeCun et al., 1991]

65

Fonction d'activation

$$\text{ReLU}(x) = \max(0, x)$$



ReLU(x)

(Rectified Linear Unit)

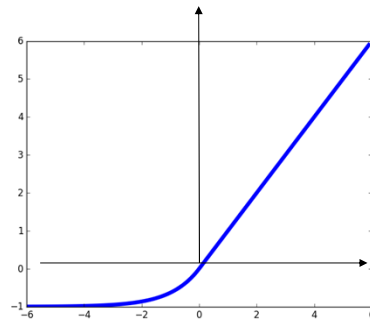
- Aucune **saturation** 😊
- Super **rapide** 😊
- **Converge plus rapide** que sigmoïde/tanh (5 à 10x) 😊
- Sortie **non centrée à zéro** ☹️
- **Un inconvénient** : qu'arrive-t-il au gradient lorsque $x < 0$? ☹️

[Krizhevsky et al., 2012]

66

Fonction d'activation

$$\text{ELU}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ \alpha(e^x - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$



ELU(x)
(Exponential Linear Unit)

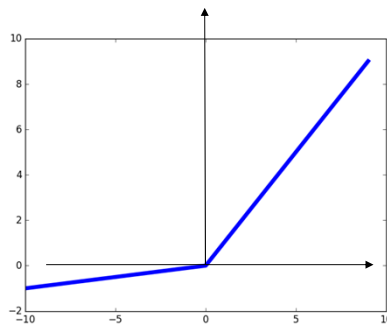
- Tous les avantages de **ReLU** 😊
- Sortie plus « centrée à zéro » 😊
- **Converge plus rapide** que sigmoïde/tanh (5 à 10x) 😊
- **Gradients meurent plus lentement** 😊
- $\exp()$ est **coûteux** ☹️

[Clevert et al., 2015]

67

Fonction d'activation

$$\text{LReLU}(x) = \max(0.01x, x)$$



Leaky ReLU(x)

- Aucune **saturation** 😊
- Super **rapide** 😊
- **Converge plus rapide** que sigmoïde/tanh (5 à 10x) 😊
- **Gradients ne meurent pas** 😊
- 0.01 est un **hyperparamètre** 😊

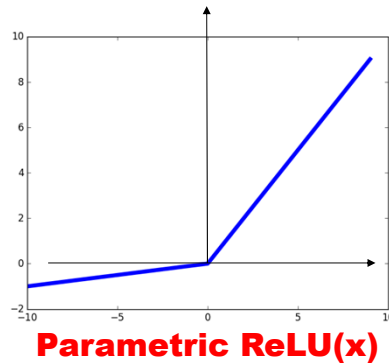
[Mass et al., 2013]

[He et al., 2015]

68

Fonction d'activation

$$\text{PReLU}(x) = \max(\alpha x, x)$$



- Aucune **saturation** 😊
- Super **rapide** 😊
- **Converge plus rapide** que sigmoïde/tanh (5 à 10x) 😊
- **Gradients ne meurent pas** 😊
- **α appris** lors de la rétro-propagation 😊

[Mass et al., 2013]
[He et al., 2015]

69

En pratique

- Par défaut, le gens utilisent **ReLU**.
- Essayez **Leaky ReLU** / **PReLU** / **ELU**
- Essayez **tanh** mais n'attendez-vous pas à grand chose
- **Ne pas utiliser de sigmoïde** sauf à la sortie d'un réseau 2 classes.

70

Les bonnes pratiques

71

Optimisation

Descente de gradient

$$\mathbf{w}^{[k+1]} = \mathbf{w}^{[k]} - \eta^{[k]} \nabla E$$

↖ Gradient de la fonction de coût

↘ Taux d'apprentissage ou "learning rate".

Descente de gradient stochastique

Initialiser \mathbf{w}
 $k=0$
FAIRE $k=k+1$
 FOR $n = 1$ to N
 $\mathbf{w} = \mathbf{w} - \eta^{[k]} \nabla E(\tilde{x}_n)$

JUSQU'À ce que toutes les données
soient bien classées ou $k = \text{MAX_ITER}$

Optimisation par *Batch*

Initialiser \mathbf{w}
 $k=0$
FAIRE $k=k+1$
 $\mathbf{w} = \mathbf{w} - \eta^{[k]} \sum_i \nabla E(\tilde{x}_i)$

JUSQU'À ce que toutes les données
soient bien classées ou $k = \text{MAX_ITER}$

Parfois $\eta^{[k]} = \text{cst} / k$

72

Optimisation

Descente de gradient

$$\mathbf{w}^{[k+1]} = \mathbf{w}^{[k]} - \eta^{[k]} \nabla E$$

→ Gradient de la fonction de coût

→ Taux d'apprentissage ou "learning rate".

TP1 TP2
TP3 TP4

Optimisation par **mini-batch**

Initialiser \mathbf{w}
k=0
FAIRE k=k+1

FAIRE n=0 à N par sauts de *MBS* /*Mini-batch size*/

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} - \eta^{[k]} \sum_{i=n}^{n+MBS} \nabla E(\tilde{x}_i)$$

JUSQU'À ce que toutes les données soient bien classées ou
k==MAX_ITER

} **Itération**

73

Optimisation

Descente de gradient

$$\mathbf{w}^{[k+1]} = \mathbf{w}^{[k]} - \eta^{[k]} \nabla E$$

→ Gradient de la fonction de coût

→ Taux d'apprentissage ou "learning rate".

Optimisation par **mini-batch**

Initialiser \mathbf{w}
k=0
FAIRE k=k+1

FAIRE n=0 à N par sauts de *MBS* /*Mini-batch size*/

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} - \eta^{[k]} \sum_{i=n}^{n+MBS} \nabla E(\tilde{x}_i)$$

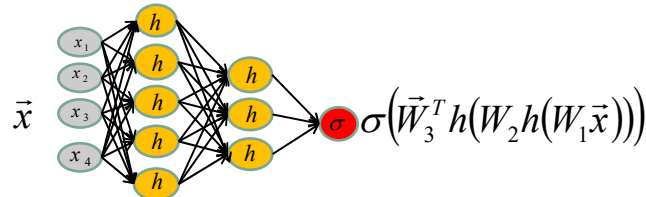
JUSQU'À ce que toutes les données sont bien classées ou
k==MAX_ITER

} **Epoch**

74

Mini-batch = **vectorisation** de la
propagation avant et de la rétro-
propagation

75



Propagation avant pour un réseau à 2 couches cachées (7 étapes)

	\vec{x}	$\in IR^4$
Étape 2 \longrightarrow	$W_1 \vec{x}$	$\in IR^5$
	$h(W_1 \vec{x})$	$\in IR^5$
	$W_2 h(W_1 \vec{x})$	$\in IR^3$
	$h(W_2 h(W_1 \vec{x}))$	$\in IR^3$
Étape 6 \longrightarrow	$\vec{W}_3^T (h(W_2 h(W_1 \vec{x})))$	$\in IR$
	$\sigma(\vec{W}_3^T (h(W_2 h(W_1 \vec{x}))))$	$\in IR$

76

$X = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

$Y = \begin{cases} \sigma(\vec{w}_3 h(w_2 h(w_1 \vec{x}_1))) \\ \sigma(\vec{w}_3 h(w_2 h(w_1 \vec{x}_2))) \\ \sigma(\vec{w}_3 h(w_2 h(w_1 \vec{x}_3))) \end{cases}$

Propagation avant pour un réseau à 2 couches cachées (7 étapes)

POUR i allant de 1 à 3

Solution
naïve et peu
efficace

$\vec{x} = X[i]$	$\in \mathbb{R}^4$
$W_1 \vec{x}$	$\in \mathbb{R}^5$
$h(W_1 \vec{x})$	$\in \mathbb{R}^5$
$W_2 h(W_1 \vec{x})$	$\in \mathbb{R}^3$
$h(W_2 h(W_1 \vec{x}))$	$\in \mathbb{R}^3$
$\vec{w}_3^T (h(W_2 h(W_1 \vec{x})))$	$\in \mathbb{R}$
$Y[i] = \sigma(\vec{w}_3^T (h(W_2 h(W_1 \vec{x}))))$	$\in \mathbb{R}$

TP1

77

Solution

Il est plus efficace d'effectuer **UNE multiplication matricielle** que **PLUSIEURS multiplications matrice-vecteur** (exemple de la 2^e étape, batch de 3)

$$W_1 \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$W_1 \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$W_1 \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

TROIS
multi.
matrice-
vecteur

78

Solution

Il est plus efficace d'effectuer **UNE multiplication matricielle** que **PLUSIEURS matrice-vecteur** (exemple de la 2^e étape, batch de 3)

$$W_1 X = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & f & j \\ d & g & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & z_1 \\ u_2 & v_2 & z_2 \\ u_3 & v_3 & z_3 \\ u_4 & v_4 & z_4 \\ u_5 & v_5 & z_5 \end{bmatrix}$$

UNE
multiplication
matricielle

79

Solution

$$\vec{w}_3^T (h(W_2 h(W_1 \vec{x})))$$

Il est plus efficace d'effectuer **UNE multiplication matricielle** que **PLUSIEURS produits scalaires** (exemple de la 6^e étape, batch de 3)

$$\begin{aligned} (w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= (w_1 a + w_2 b + w_3 c) \\ (w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} &= (w_1 d + w_2 e + w_3 f) \\ (w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} &= (w_1 g + w_2 h + w_3 i) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix} = Y$$

TROIS
produits
scalaires

80

Solution

Il est plus efficace d'effectuer **UNE multiplication matricielle** que PLUSIEURS produits scalaires (**exemple de la 6^e étape, batch de 3**)

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix} = Y$$



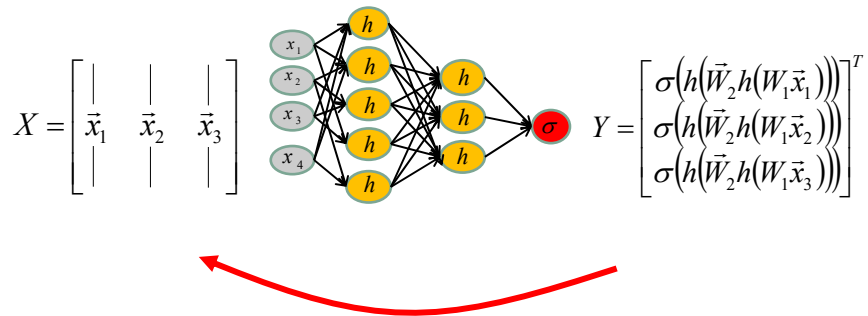
81

Vectorisation de la propagation avant

En résumé, lorsqu'on propage une « *batch* » de données

Au niveau neuronal	Multi. Vecteur-Matrice	$\vec{w}^T X = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$
Au niveau de la couche	Multi. Matrice-Matrice	$WX = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & f & j \\ d & g & k \end{bmatrix}$

82



Vectoriser la rétropropagation

83

Vectoriser la rétropropagation

Exemple simple pour **1 neurone et une batch de 3 données**

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \end{matrix} & = & \begin{matrix} \begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix}^T \end{matrix} \\ \vec{w}^T & X & & Y \end{matrix}$$

En supposant qu'on connaît le gradient pour les 3 éléments de Y provenant de la sortie du réseau, comment faire pour propager le gradient vers \vec{w}^T ?

84

Vectoriser la rétropropagation

Exemple simple pour **1 neurone et une batch de 3 données**

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix}^T \\ \vec{w}^T & X & & Y \end{matrix}$$

Rappelons que l'objectif est de faire une **descente de gradient**, i.e.

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \frac{\partial E}{\partial w_1} \quad w_2 \leftarrow w_2 - \eta \frac{\partial E}{\partial w_2} \quad w_3 \leftarrow w_3 - \eta \frac{\partial E}{\partial w_3}$$

85

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix}^T \\ \vec{w}^T & X & & Y \end{matrix}$$

Concentrons-nous sur w_1

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \frac{\partial E}{\partial w_1}$$

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \frac{\partial E}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial w_1} \quad (\text{par propriété de la dérivée en chaîne})$$

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \left[\frac{\partial E_1}{\partial Y} \quad \frac{\partial E_2}{\partial Y} \quad \frac{\partial E_3}{\partial Y} \right] \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} \quad (\text{provient de la rétro-propagation})$$

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \left(\frac{\partial E_1}{\partial Y} a + \frac{\partial E_2}{\partial Y} b + \frac{\partial E_3}{\partial Y} c \right)$$

86

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix}^T \\ \vec{w}^T & X & & Y \end{matrix}$$

Concentrons-nous sur w_1

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \frac{\partial E}{\partial w_1}$$

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \frac{\partial E}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial w_1} \quad (\text{par propriété de la dérivée en chaîne})$$

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \left[\frac{\partial E_1}{\partial Y} \quad \frac{\partial E_2}{\partial Y} \quad \frac{\partial E_3}{\partial Y} \right] \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} \quad \text{(Puisqu'on a une batch de 3 éléments, on a 3 prédictions et donc 3 gradients)}$$

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \left(\frac{\partial E_1}{\partial Y} a + \frac{\partial E_2}{\partial Y} b + \frac{\partial E_3}{\partial Y} c \right)$$

87

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix}^T \\ \vec{w}^T & X & & Y \end{matrix}$$

Donc en résumé ...

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \left[\frac{\partial E_1}{\partial Y} \quad \frac{\partial E_2}{\partial Y} \quad \frac{\partial E_3}{\partial Y} \right] \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}$$

88

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \\ \vec{w}^T \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\ X \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix}^T \\ Y \end{matrix}$$

Et pour tous les poids

$$w_1 \leftarrow w_1 - \eta \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial Y} & \frac{\partial E_2}{\partial Y} & \frac{\partial E_3}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}$$

$$w_2 \leftarrow w_2 - \eta \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial Y} & \frac{\partial E_2}{\partial Y} & \frac{\partial E_3}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}$$

$$w_3 \leftarrow w_3 - \eta \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial Y} & \frac{\partial E_2}{\partial Y} & \frac{\partial E_3}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$$

89

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \\ \vec{w}^T \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\ X \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} w_1 a + w_2 b + w_3 c \\ w_1 d + w_2 e + w_3 f \\ w_1 g + w_2 h + w_3 i \end{pmatrix}^T \\ Y \end{matrix}$$

Et pour tous les poids

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}^T \leftarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}^T - \eta \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial Y} & \frac{\partial E_2}{\partial Y} & \frac{\partial E_3}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}^T \leftarrow \vec{w}^T - \eta \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial Y} & \frac{\partial E_2}{\partial Y} & \frac{\partial E_3}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial w_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial w_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial w_3} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial w_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial w_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial w_3} \\ \frac{\partial Y_3}{\partial w_1} & \frac{\partial Y_3}{\partial w_2} & \frac{\partial Y_3}{\partial w_3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}^T \leftarrow \vec{w}^T - \eta \frac{\partial \vec{E}^T}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \vec{W}}$$

Matrice jacobienne

90

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} \end{pmatrix}
 \begin{bmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & f & j \\ d & g & k \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & z_1 \\ u_2 & v_2 & z_2 \\ u_3 & v_3 & z_3 \\ u_4 & v_4 & z_4 \\ u_5 & v_5 & z_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} W & X & Y \end{matrix}$$

Même chose pour **1 couche 5x4 et une batch de 3 données**

$$W \leftarrow W^T - \eta \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial E_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial E_3}{\partial Y_1} \\ \frac{\partial E_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial E_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial E_3}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial E_1}{\partial Y_3} & \frac{\partial E_2}{\partial Y_3} & \frac{\partial E_3}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial E_1}{\partial Y_4} & \frac{\partial E_2}{\partial Y_4} & \frac{\partial E_3}{\partial Y_4} \\ \frac{\partial E_1}{\partial Y_5} & \frac{\partial E_2}{\partial Y_5} & \frac{\partial E_3}{\partial Y_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & e & f & g \\ h & i & j & k \end{bmatrix}$$

$$W^T \leftarrow W^T - \eta \frac{\partial E^T}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial W}$$

91

Vectorisation de la rétro-propagation

En résumé, lorsqu'on rétro-propage le gradient d'une batch

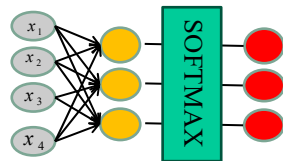
Au niveau neuronal	Multi. Vecteur-Matrice	$ \vec{W}^T \leftarrow \vec{W}^T - \eta \frac{\partial \vec{E}^T}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \vec{W}} $ $ \vec{W}^T \leftarrow \vec{W}^T - \eta \frac{\partial \vec{E}^T}{\partial Y} X $
Au niveau de la couche	Multi. Matrice-Matrice	$ W^T \leftarrow W^T - \eta \frac{\partial E^T}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial W} $ $ W^T \leftarrow W^T - \eta \frac{\partial E^T}{\partial Y} X $

92

Vectorisation de l'entropie croisée

93

Rappel : entropie croisée, 1 donnée



$$y_W(\vec{x}) = \text{SoftMax}(W\vec{x})$$

$$\begin{aligned} L_{\vec{x}}(W) &= - \sum_{k=1}^K t_{kn} \ln y_{W_k}(\vec{x}) \\ &= -\vec{t}^T \ln y_W(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\nabla_W L_{\vec{x}}(W) = (y_W(\vec{x}_n) - \vec{t}) \vec{x}^T$$

94

$\vec{x} \in \mathbb{R}^4$

$W \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$

L

Propagation avant d'une donnée pour un réseau à **1 couche** (3 étapes)

\vec{x}		$\in \mathbb{R}^4$
$W \vec{x}$		$\in \mathbb{R}^3$
$Y = SM(W \vec{x})$		$\in \mathbb{R}^3$
$L = -\vec{t}^T \ln Y$		$\in \mathbb{R}$

95

$\vec{x} = [1, 2, 3, 4]^T$

$W \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$

Y

$L = -\vec{t}^T \ln y_W(\vec{x})$

Exemple de perte:

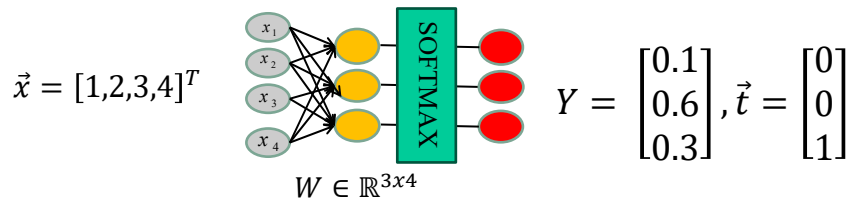
$$Y = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = -[0 \ 0 \ 1] \ln \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= -[0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} -2.3 \\ -0.5 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

$$= 1.2$$

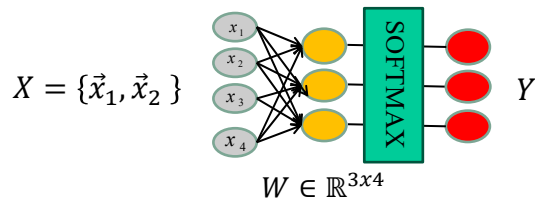
96



Exemple de gradient

$$\begin{aligned} \nabla_W L &= (Y - \vec{t}) \vec{x}^T \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) [1, 2, 3, 4] \\ &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ -0.7 \end{bmatrix} [1, 2, 3, 4] \\ &= \begin{bmatrix} .1 & .2 & .3 & .4 \\ .6 & 1.2 & 1.8 & 2.4 \\ .3 & .6 & .9 & 1.2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \end{aligned}$$

97



Approche par batch

Solution par batch

$$\begin{aligned} X &\in \mathbb{R}^{4 \times 2} \\ W \vec{x} &\in \mathbb{R}^{3 \times 2} \\ Y = SM(W \vec{x}) &\in \mathbb{R}^{3 \times 2} \\ L = -T^T \ln Y &\in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

TP1

98

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$L = -T^T \ln Y$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.25 \\ 0.3 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Exemple de perte:

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.25 \\ 0.3 & 0.05 \end{bmatrix} \text{ et } T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ln \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.25 \\ 0.3 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.3 & -0.4 \\ -0.5 & -1.4 \\ -1.2 & -3.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

99

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.25 \\ 0.3 & 0.05 \end{bmatrix} \text{ et } T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple de gradient

$$\nabla_W L = (Y - T) X$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.25 \\ 0.3 & 0.05 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.3 \\ 0.6 & 0.25 \\ -0.7 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.4 & -1.6 & -1.8 & -2 \\ 1.8 & 2.7 & 3.6 & 4.4 \\ -0.5 & -1.1 & -1.7 & -2.4 \end{bmatrix}$$

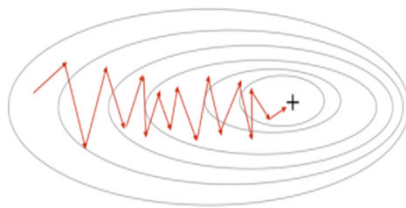
100

Pour plus de détails:

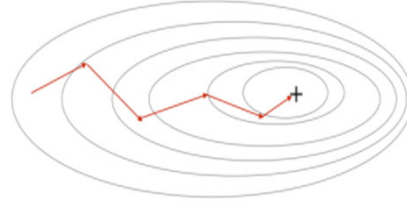
<https://medium.com/datathings/vectorized-implementation-of-back-propagation-1011884df84>
<https://peterroelants.github.io/posts/neural-network-implementation-part04/>

101

Stochastic Gradient Descent



Mini-Batch Gradient Descent



102

Comment initialiser un réseau de neurones?

$$W = ?$$

103

Initialisation

Première idée: faibles valeurs aléatoires
(Gaussienne $\mu = 0, \sigma = 0.01$)

```
W_i=0.01*np.random.randn(H_i,H_im1)
```

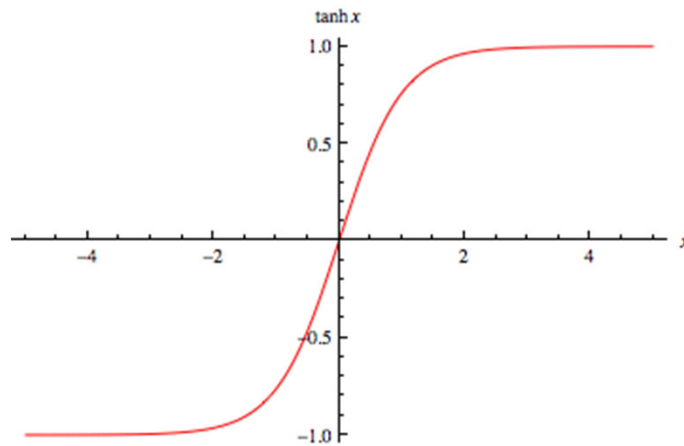
Fonctionne bien pour de petits réseaux mais
pas pour des réseaux profonds.



E.g. réseau à 10 couches avec 500 neurones par couche et des **tanh** comme fonctions d'activation.

104

Rappel tanh...

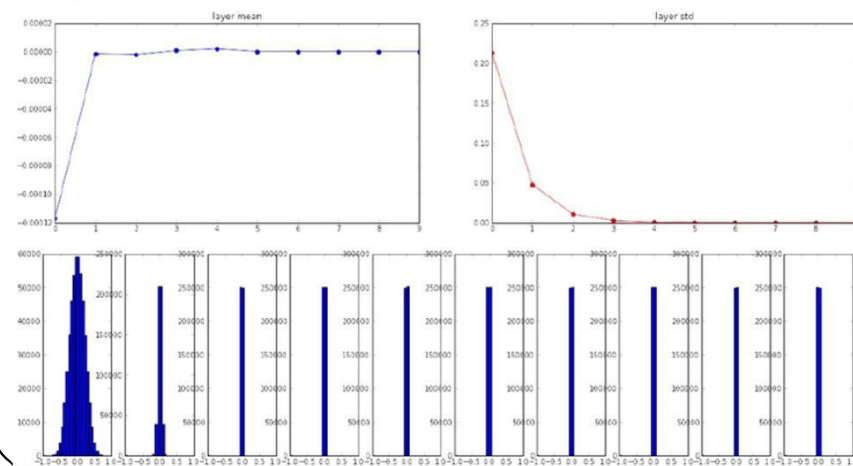


105

Histogrammes des valeurs de sortie des 10 couches.

input layer had mean 0.000927 and std 0.998388
 hidden layer 1 had mean -0.000117 and std 0.213081
 hidden layer 2 had mean -0.000001 and std 0.047551
 hidden layer 3 had mean -0.000002 and std 0.010630
 hidden layer 4 had mean 0.000001 and std 0.002378
 hidden layer 5 had mean 0.000002 and std 0.000532
 hidden layer 6 had mean -0.000000 and std 0.000119
 hidden layer 7 had mean 0.000000 and std 0.000026
 hidden layer 8 had mean -0.000000 and std 0.000006
 hidden layer 9 had mean 0.000000 and std 0.000001
 hidden layer 10 had mean -0.000000 and std 0.000000

L'activation des couches devient zéro!



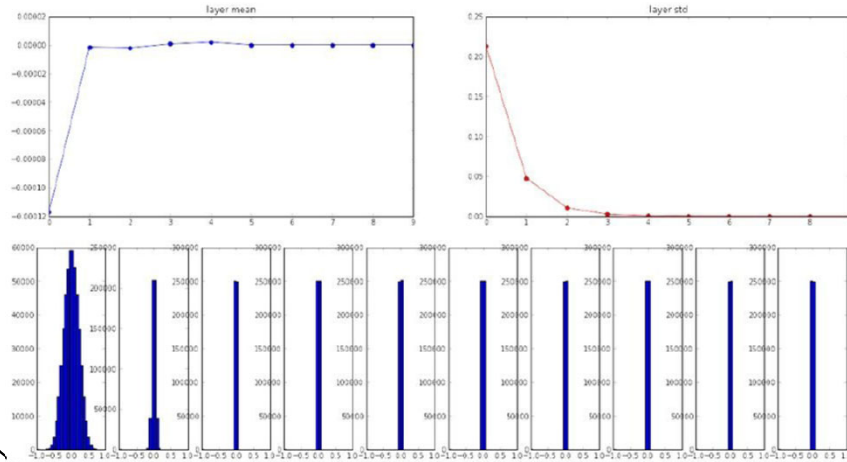
Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

106

Histogrammes des valeurs de sortie des 10 couches.

```
input layer had mean 0.000927 and std 0.998388
hidden layer 1 had mean -0.000117 and std 0.213081
hidden layer 2 had mean -0.000001 and std 0.047551
hidden layer 3 had mean -0.000002 and std 0.010630
hidden layer 4 had mean 0.000001 and std 0.002378
hidden layer 5 had mean 0.000002 and std 0.000532
hidden layer 6 had mean -0.000000 and std 0.000119
hidden layer 7 had mean 0.000000 and std 0.000026
hidden layer 8 had mean -0.000000 and std 0.000006
hidden layer 9 had mean 0.000000 and std 0.000001
hidden layer 10 had mean -0.000000 and std 0.000000
```

Vous voyez ce qui arrive
à la **forward pass** et la
rétropropagation?



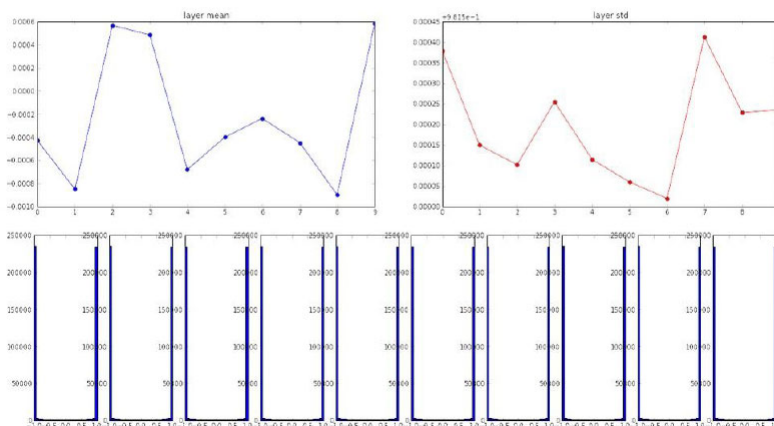
Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

107

$W_i = \text{np.random.randn}(H_i, H_{im1}) * 1$

```
input layer had mean 0.001800 and std 1.061311
hidden layer 1 had mean -0.000430 and std 0.981879
hidden layer 2 had mean -0.000949 and std 0.981649
hidden layer 3 had mean 0.000566 and std 0.981681
hidden layer 4 had mean 0.000483 and std 0.981755
hidden layer 5 had mean -0.000682 and std 0.981614
hidden layer 6 had mean -0.000401 and std 0.981560
hidden layer 7 had mean -0.000237 and std 0.981520
hidden layer 8 had mean -0.000448 and std 0.981913
hidden layer 9 had mean -0.000899 and std 0.981728
hidden layer 10 had mean 0.000584 and std 0.981736
```

1 au lieu de 0.01



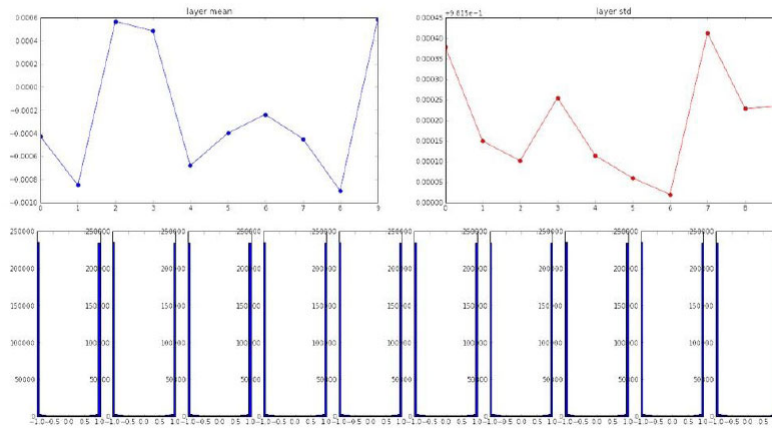
Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

108

`W_i=np.random.randn(H_i,H_im1)*1`

input layer had mean 0.001800 and std 1.061311
 hidden layer 1 had mean -0.000430 and std 0.981879
 hidden layer 2 had mean -0.000849 and std 0.981649
 hidden layer 3 had mean 0.000566 and std 0.981681
 hidden layer 4 had mean 0.000483 and std 0.981755
 hidden layer 5 had mean -0.000682 and std 0.981614
 hidden layer 6 had mean -0.000401 and std 0.981560
 hidden layer 7 had mean -0.000237 and std 0.981520
 hidden layer 8 had mean -0.000448 and std 0.981913
 hidden layer 9 had mean -0.000899 and std 0.981728
 hidden layer 10 had mean 0.000584 and std 0.981736

La sortie des neurones
 sature à 1 ou -1



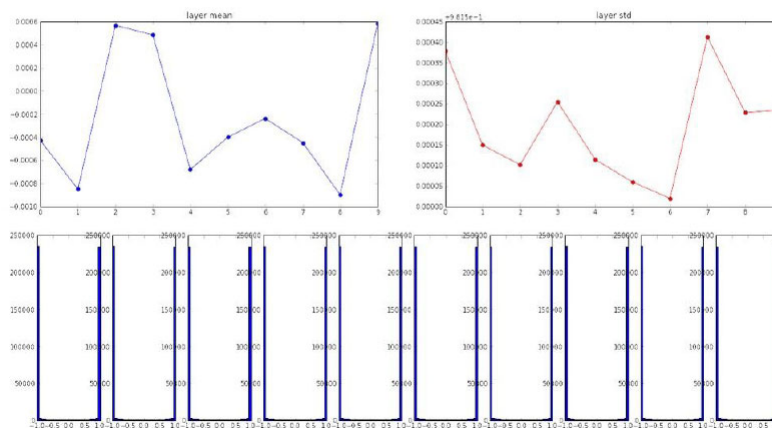
Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

109

`W_i=np.random.randn(H_i,H_im1)*1`

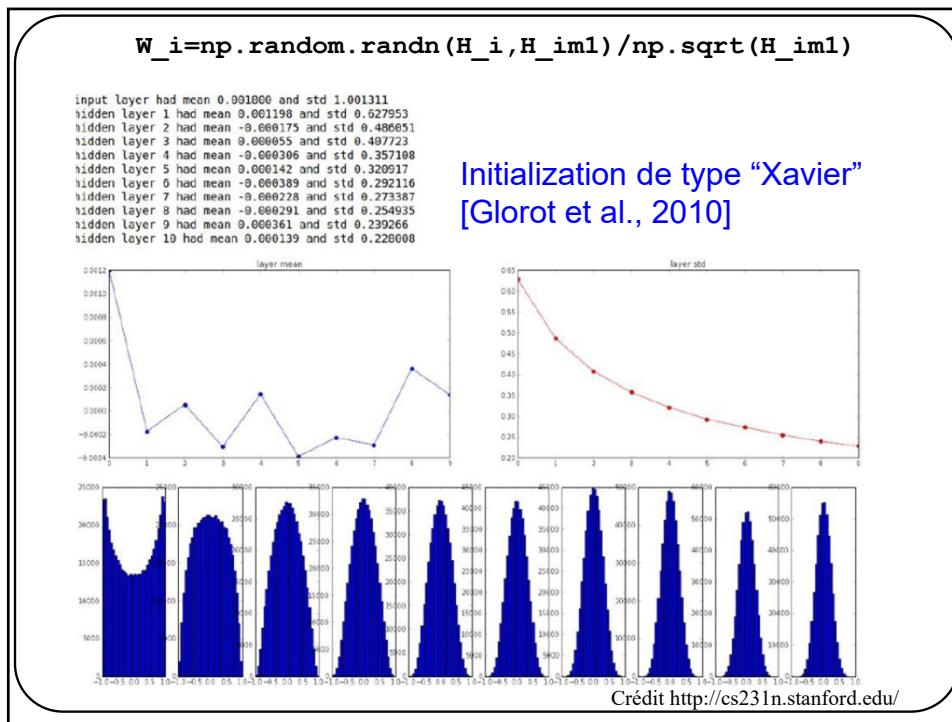
input layer had mean 0.001800 and std 1.061311
 hidden layer 1 had mean -0.000430 and std 0.981879
 hidden layer 2 had mean -0.000849 and std 0.981649
 hidden layer 3 had mean 0.000566 and std 0.981681
 hidden layer 4 had mean 0.000483 and std 0.981755
 hidden layer 5 had mean -0.000682 and std 0.981614
 hidden layer 6 had mean -0.000401 and std 0.981560
 hidden layer 7 had mean -0.000237 and std 0.981520
 hidden layer 8 had mean -0.000448 and std 0.981913
 hidden layer 9 had mean -0.000899 and std 0.981728
 hidden layer 10 had mean 0.000584 and std 0.981736

Vous voyez ce qui arrive
 à la **forward pass** et la
rétropropagation?

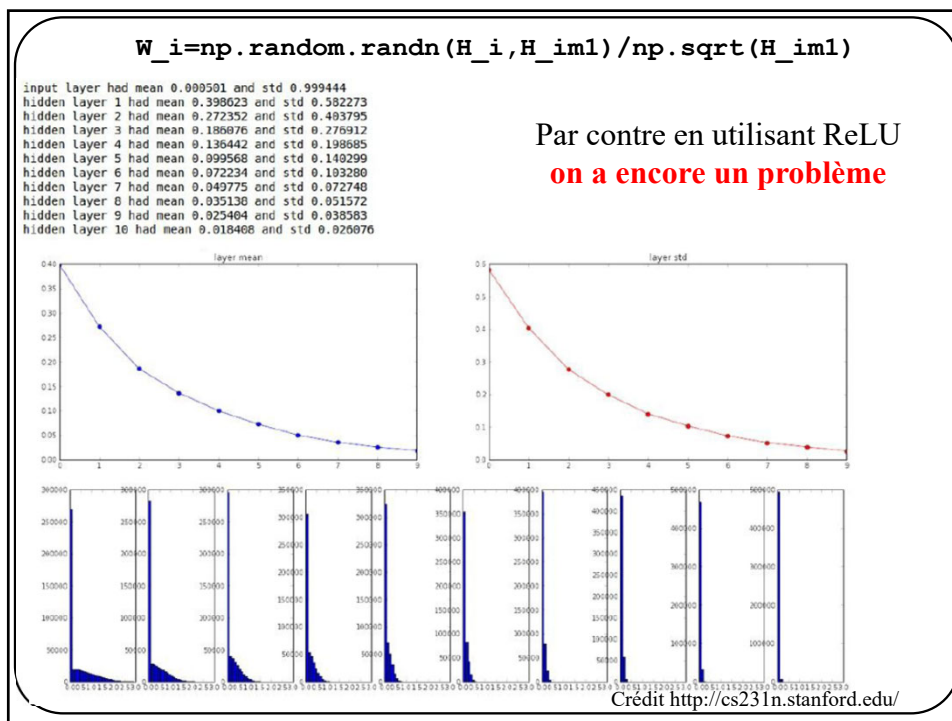


Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

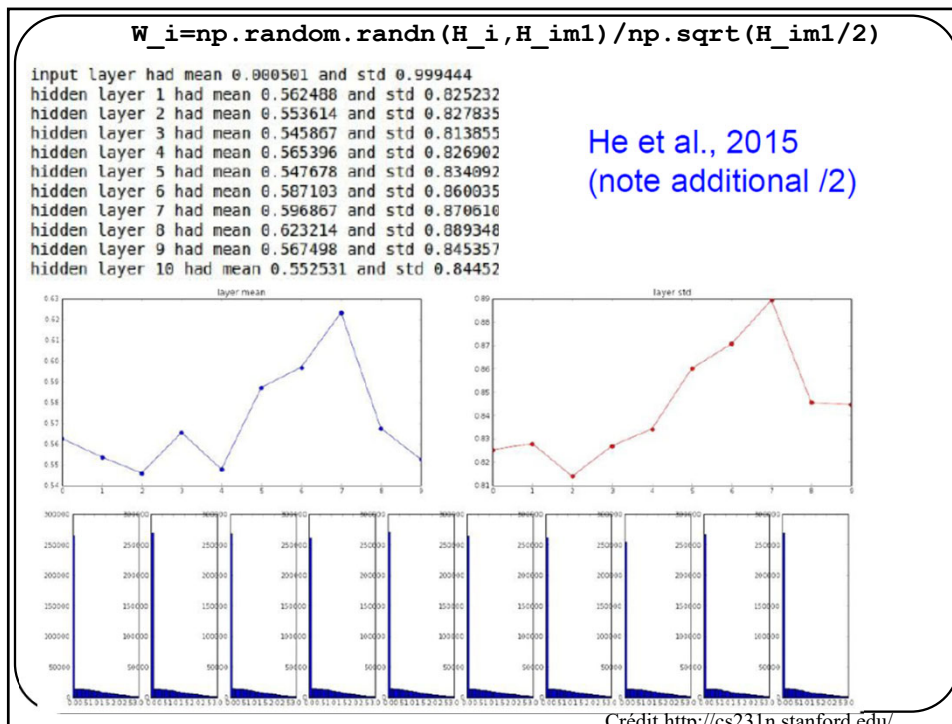
110



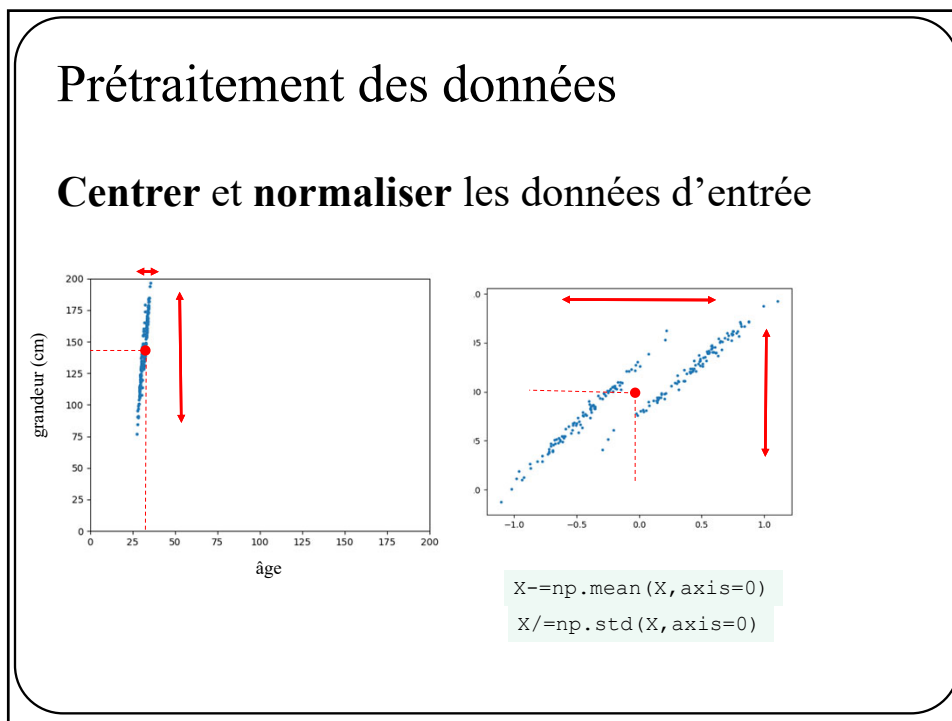
111



112



113



114

Les « sanity checks » ou vérifications diligentes

115

Sanity checks

1. Toujours s'assurer qu'une initialisation aléatoire donne une **perte (loss) maximale**

Exemple : pour le cas **10 classes**, une **régularisation à 0** et une **entropie croisée**.

$$E_D(W) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K t_{kn} \ln y_{W,k}(\vec{x}_n)$$

Si l'initialisation est aléatoire, alors la probabilité sera en moyenne égale pour chaque classe

$$\begin{aligned} E_D(W) &= -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \frac{1}{10} \\ &= \ln(10) \\ &= 2.30 \end{aligned}$$

116

Sanity checks

1. Toujours s'assurer qu'une initialisation aléatoire donne une perte (*loss*) maximale

Exemple : pour le cas **10 classes**, une **régularisation à 0** et une **entropie croisée**.

```
def init_two_layer_model(input_size, hidden_size, output_size):  
    # initialize a model  
    model = {}  
    model['W1'] = 0.0001 * np.random.randn(input_size, hidden_size)  
    model['b1'] = np.zeros(hidden_size)  
    model['W2'] = 0.0001 * np.random.randn(hidden_size, output_size)  
    model['b2'] = np.zeros(output_size)  
    return model
```

```
model = init_two_layer_model(32*32*3, 50, 10) # input size, hidden size, number of classes  
loss, grad = two_layer_net(X_train, model, y_train, 0.0) # disable regularization  
print loss  
2.30261216167
```

loss ~2.3.
"correct" for
10 classes

returns the loss and the
gradient for all parameters.

Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

117

Sanity checks

2. Et lorsqu'on **augmente la régularisation**, la perte augmente aussi

```
def init_two_layer_model(input_size, hidden_size, output_size):  
    # initialize a model  
    model = {}  
    model['W1'] = 0.0001 * np.random.randn(input_size, hidden_size)  
    model['b1'] = np.zeros(hidden_size)  
    model['W2'] = 0.0001 * np.random.randn(hidden_size, output_size)  
    model['b2'] = np.zeros(output_size)  
    return model
```

```
model = init_two_layer_model(32*32*3, 50, 10) # input size, hidden size, number of classes  
loss, grad = two_layer_net(X_train, model, y_train, 1e3) # crank up regularization  
print loss  
3.06859716482
```

loss went up, good. (sanity check)

Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

118

Sanity checks

3. Toujours s'assurer qu'on peut « **over-fitter** » sur un **petit nombre de données**.

Lets try to train now...

Tip: Make sure that you can overfit very small portion of the training data

Very small loss, train accuracy 1.00, nice!

```
model = init_two_layer_model(32*32*3, 50, 10) # input size, hidden size, number of classes
trainer = ClassifierTrainer()
X_tiny = X_train[:20] # take 20 examples
y_tiny = y_train[:20]
best_model, stats = trainer.train(X_tiny, y_tiny, X_tiny, y_tiny,
                                  model, two_layer_net,
                                  num_epochs=200, reg=0.0,
                                  update='sgd', learning_rate_decay=1,
                                  sample_batches = False,
                                  learning_rate=1e-3, verbose=True)
```

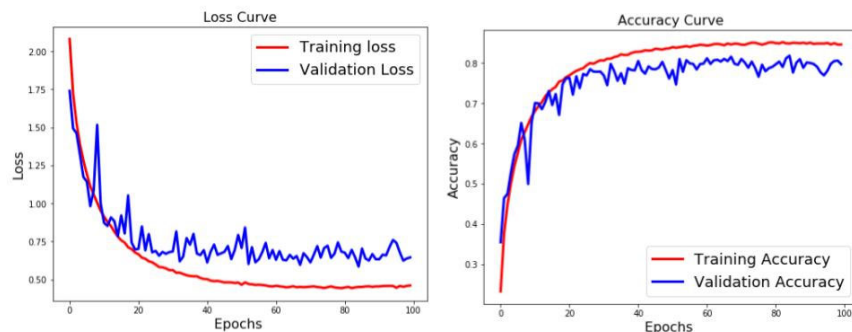
Finished epoch 1 / 200: cost: 2.302603, train: 0.400000, val: 0.400000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 2 / 200: cost: 2.302258, train: 0.450000, val: 0.450000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 3 / 200: cost: 2.301849, train: 0.600000, val: 0.600000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 4 / 200: cost: 2.301396, train: 0.650000, val: 0.650000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 5 / 200: cost: 2.300944, train: 0.650000, val: 0.650000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 6 / 200: cost: 2.297864, train: 0.550000, val: 0.550000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 7 / 200: cost: 2.293395, train: 0.600000, val: 0.600000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 8 / 200: cost: 2.285096, train: 0.550000, val: 0.550000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 9 / 200: cost: 2.268094, train: 0.550000, val: 0.550000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 10 / 200: cost: 2.234787, train: 0.500000, val: 0.500000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 11 / 200: cost: 2.173187, train: 0.500000, val: 0.500000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 12 / 200: cost: 2.076862, train: 0.500000, val: 0.500000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 13 / 200: cost: 1.974999, train: 0.400000, val: 0.400000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 14 / 200: cost: 1.895885, train: 0.400000, val: 0.400000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 15 / 200: cost: 1.820878, train: 0.450000, val: 0.450000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 16 / 200: cost: 1.737439, train: 0.450000, val: 0.450000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 17 / 200: cost: 1.642358, train: 0.500000, val: 0.500000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 18 / 200: cost: 1.535239, train: 0.600000, val: 0.600000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 19 / 200: cost: 1.421527, train: 0.600000, val: 0.600000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 20 / 200: cost: 1.302603, train: 0.400000, val: 0.400000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 195 / 200: cost: 0.002654, train: 1.000000, val: 1.000000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 196 / 200: cost: 0.002674, train: 1.000000, val: 1.000000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 197 / 200: cost: 0.002655, train: 1.000000, val: 1.000000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 198 / 200: cost: 0.002655, train: 1.000000, val: 1.000000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 199 / 200: cost: 0.002617, train: 1.000000, val: 1.000000, lr: 1.000000e-03
 Finished epoch 200 / 200: cost: 0.002597, train: 1.000000, val: 1.000000, lr: 1.000000e-03
 finished optimization, best validation accuracy: 1.000000

Crédit <http://cs231n.stanford.edu>

119

Sanity checks

3. Toujours visualiser les courbes d'apprentissage et de validation

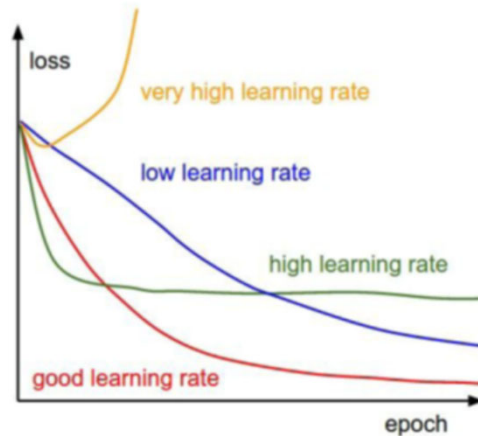


Source: <https://www.learnopencv.com/wp-content/uploads/2017/11/cnn-keras-curves-without-aug.jpg>

120

Sanity checks

3. Toujours visualiser les courbes d'apprentissage et de validation



Credit <http://cs231n.stanford.edu>

121

Sanity checks

4. Toujours vérifier la validité d'un gradient

Comme on l'a vu, calculer un gradient est sujet à erreur. Il faut donc toujours s'assurer que nos gradients sont bons au fur et à mesure qu'on écrit notre code. En voici la meilleure façon

Rappel

Approximation numérique de la dérivée

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

122

Sanity checks

3. Toujours vérifier la validité d'un gradient

On peut facilement calculer un gradient à l'aide d'une approximation numérique.

Rappel

Approximation numérique du gradient

$$\nabla E(W) \approx \frac{E(W + H) - E(W)}{H}$$

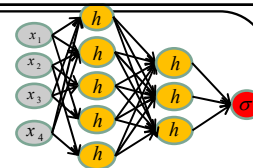
En calculant

$$\frac{\partial E(W)}{\partial w_i} \approx \frac{E(w_i + h) - E(w_i)}{h} \quad \forall i$$

123

Vérification du gradient

(exemple)



W

W+h

gradient W

$W_{00} = 0.34$

$W_{00} = 0.34$ **+0.0001**

-2.5=(1.25322-1.25347)/0.0001

$W_{01} = -1.11$

$W_{01} = -1.11$

$W_{02} = 0.78$

$W_{02} = 0.78$

...

...

$W_{20} = -3.1$

$W_{20} = -3.1$

$W_{21} = -1.5,$

$W_{21} = -1.5,$

$W_{22} = 0.33$

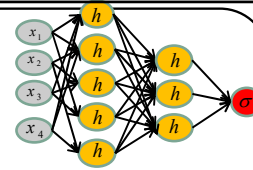
$W_{22} = 0.33$

$E(W)=1.25347$ $E(W+h)=1.25322$

124

Vérification du gradient

(exemple)



W

W+h

gradient W

$$W_{00} = 0.34$$

$$W_{00} = 0.34$$

$$-2.5$$

$$W_{01} = -1.11$$

$$W_{01} = -1.11 + 0.0001$$

$$0.6 = (1.25353 - 1.25347) / 0.0001$$

$$W_{02} = 0.78$$

$$W_{02} = 0.78$$

...

...

$$W_{20} = -3.1$$

$$W_{20} = -3.1$$

$$W_{21} = -1.5,$$

$$W_{21} = -1.5,$$

$$W_{22} = 0.33$$

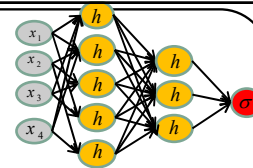
$$W_{22} = 0.33$$

$$E(W) = 1.25347 \quad E(W+h) = 1.25353$$

125

Vérification du gradient

(exemple)



W

W+h

gradient W

$$W_{00} = 0.34$$

$$W_{00} = 0.34$$

$$-2.5$$

$$W_{01} = -1.11$$

$$W_{01} = -1.11$$

$$0.6$$

$$W_{02} = 0.78$$

$$W_{02} = 0.78 + 0.0001$$

$$0.0 = (1.25347 - 1.25347) / 0.0001$$

...

...

$$W_{20} = -3.1$$

$$W_{20} = -3.1$$

$$W_{21} = -1.5,$$

$$W_{21} = -1.5,$$

$$W_{22} = 0.33$$

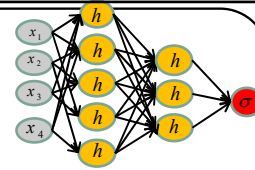
$$W_{22} = 0.33$$

$$E(W) = 1.25347 \quad E(W+h) = 1.25347$$

126

Vérification du gradient

(exemple)



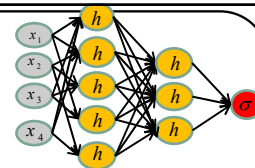
W	W+h	gradient W
$W_{00} = 0.34$	$W_{00} = 0.34$	-2.5
$W_{01} = -1.11$	$W_{01} = -1.11$	0.6
$W_{02} = 0.78$	$W_{02} = 0.78$	0.0
...
$W_{20} = -3.1$	$W_{20} = -3.1$	1.1
$W_{21} = -1.5$	$W_{21} = -1.5$	1.3
$W_{22} = 0.33$	$W_{22} = 0.33$	-2.1

E(W)=1.25347

127



Vérification du gradient

(exemple)



gradient W
(numérique)

gradient W
(retro-propagation)

-2.5		-2.5
0.6		0.6
0.0		0.0
...		...
1.1		1.1
1.3		1.3
-2.1		-2.1

Vérification
réussie

128

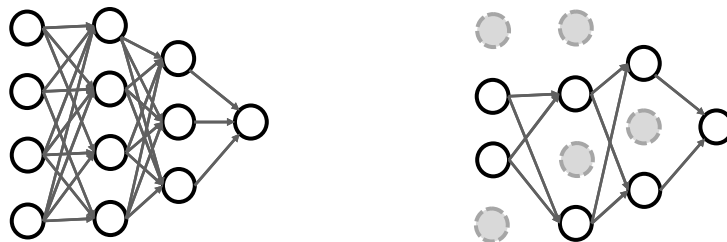
Autre bonne pratique

Dropout

129

Dropout

Forcer à zéro certains neurones de façon aléatoire à chaque itération



Srivastava et al. "Dropout: a simple way to prevent neural networks from overfitting", JMLR 2014

130

Dropout

Idée : s'assurer que **chaque neurone apprend pas lui-même** en brisant au hasard des chemins.

131

Dropout

```
p = 0.5 # probability of keeping a unit active. higher = less dropout

def train_step(X):
    """ X contains the data """

    # forward pass for example 3-layer neural network
    H1 = np.maximum(0, np.dot(W1, X) + b1)
    U1 = np.random.rand(*H1.shape) < p # first dropout mask
    H1 *= U1 # drop!
    H2 = np.maximum(0, np.dot(W2, H1) + b2)
    U2 = np.random.rand(*H2.shape) < p # second dropout mask
    H2 *= U2 # drop!
    out = np.dot(W3, H2) + b3

    # backward pass: compute gradients... (not shown)
    # perform parameter update... (not shown)
```

Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

132

Dropout

Le problème avec **Dropout** est en **prédiction** (« test time »)
car dropout **ajoute du bruit** à la prédiction

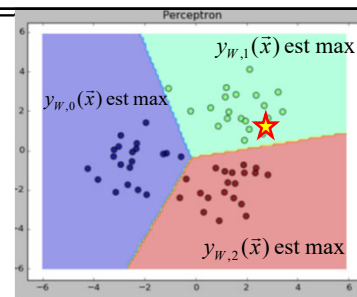
$$pred = y_W(\vec{x}, Z)$$

↑
masque aléatoire

133

dropout **ajoute du bruit** à la prédiction.

Exemple simple : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.3 \end{pmatrix}, t = 1$



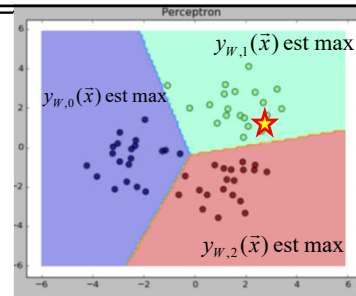
Si on lance le modèle 10 fois, on aura 10 réponses différentes

[0.09378555	0.76511644	0.141098]
[0.13982909	0.62885327	0.23131764]
[0.23658253	0.61960162	0.14381585]
[0.23779425	0.51357115	0.24863461]
[0.16005442	0.68060227	0.1593433]
[0.16303195	0.50583392	0.33113413]
[0.24183069	0.51319834	0.24497097]
[0.14521815	0.52006858	0.33471327]
[0.09952161	0.66276146	0.23771692]
[0.16172851	0.6044877	0.23378379]

134

dropout **ajoute du bruit** à la prédiction.

Exemple simple : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.3 \end{pmatrix}, t = 1$



Solution, exécuter le modèle un grand nombre de fois et **prendre la moyenne**.

```
[ 0.09378555  0.76511644  0.141098 ]
[ 0.13982909  0.62885327  0.23131764]
[ 0.23658253  0.61960162  0.14381585]
[ 0.23779425  0.51357115  0.24863461]
[ 0.16005442  0.68060227  0.1593433 ]
[ 0.16303195  0.50583392  0.33113413]
[ 0.24183069  0.51319834  0.24497097]
[ 0.14521815  0.52006858  0.33471327]
[ 0.09952161  0.66276146  0.23771692]
[ 0.16172851  0.6044877   0.23378379]
(...)
```

[0.15933813, 0.65957005, 0.18109183]

135

Exécuter le modèle un grand nombre de fois et **prendre la moyenne** revient à calculer **l'espérance mathématique**

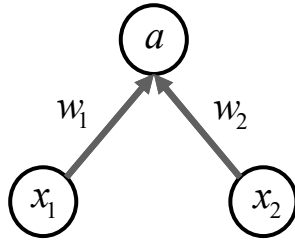
$$pred = E_z [y_w(\vec{x}, \vec{z})] = \sum_i P(\vec{z}) y_w(\vec{x}, \vec{z})$$

**Bonne nouvelle, on
peut faire plus simple
en approximant
l'espérance
mathématique!**

136

Regardons pour un neurone

Avec une probabilité de *dropout* de 50%, en prédiction w_1 et w_2 seront **nuls 1 fois sur 2**



$$\begin{aligned}
 E[a] &= \frac{1}{4}(w_1x_1 + w_2x_2) + \frac{1}{4}(w_1x_1 + 0x_2) \\
 &\quad + \frac{1}{4}(0x_1 + w_2x_2) + \frac{1}{4}(0x_1 + 0x_2) \\
 &= \frac{1}{2}(w_1x_1 + w_2x_2)
 \end{aligned}$$

En prédiction, on a qu'à multiplier par la prob. de *dropout*.

137

```

""" Vanilla Dropout: Not recommended implementation (see notes below) """

p = 0.5 # probability of keeping a unit active. higher = less dropout

def train_step(X):
    """ X contains the data """

    # forward pass for example 3-layer neural network
    H1 = np.maximum(0, np.dot(W1, X) + b1)
    U1 = np.random.rand(*H1.shape) < p # first dropout mask
    H1 *= U1 # drop!
    H2 = np.maximum(0, np.dot(W2, H1) + b2)
    U2 = np.random.rand(*H2.shape) < p # second dropout mask
    H2 *= U2 # drop!
    out = np.dot(W3, H2) + b3

    # backward pass: compute gradients... (not shown)
    # perform parameter update... (not shown)

def predict(X):
    # ensembled forward pass
    H1 = np.maximum(0, np.dot(W1, X) + b1) * p # NOTE: scale the activations
    H2 = np.maximum(0, np.dot(W2, H1) + b2) * p # NOTE: scale the activations
    out = np.dot(W3, H2) + b3
  
```

En prédiction, tous les neurones sont actifs

→ tout ce qu'il faut faire est de **multiplier la sortie de chaque couche par la probabilité de dropout**

Crédit <http://cs231n.stanford.edu/>

138

NOTE

Au tp2, vous implanterez un **dropout inverse**. À vous de le découvrir!

139

Descente de gradient
version améliorée

140

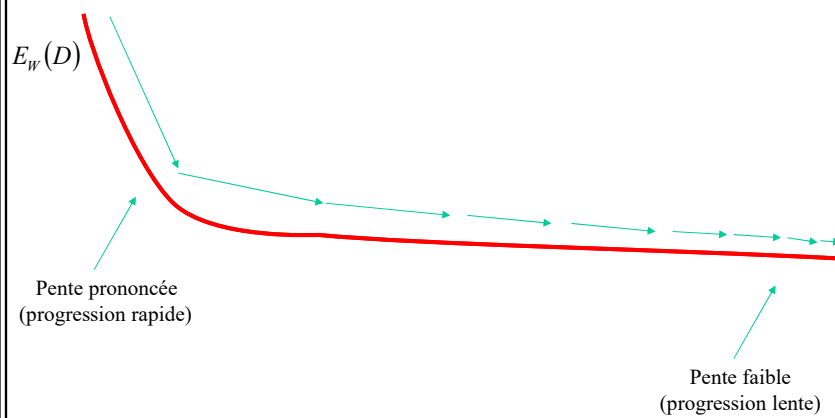
Descente de gradient

$$W^{[t+1]} = W^{[t]} - \eta \nabla E_{W^{[t]}}(D)$$

141

Descente de gradient : **problème**

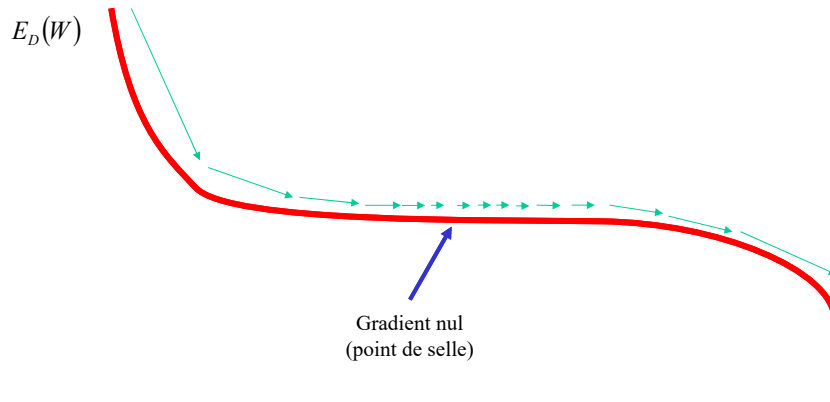
Progrès quasi nul lorsque la pente est très faible



142

Descente de gradient : **problème**

Les points de selles sont fréquents en haute dimension



143

Descente de gradient : **problème**

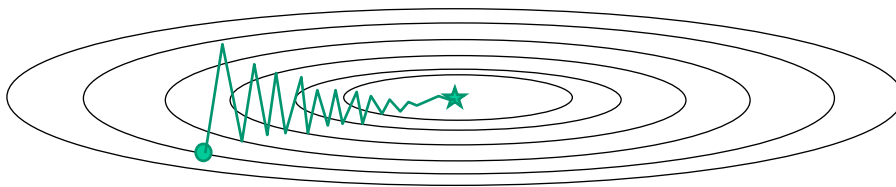
Qu'arrive-t-il si la fonction de coût (loss) a une pente prononcée dans une direction et moins prononcée dans une autre direction?

144

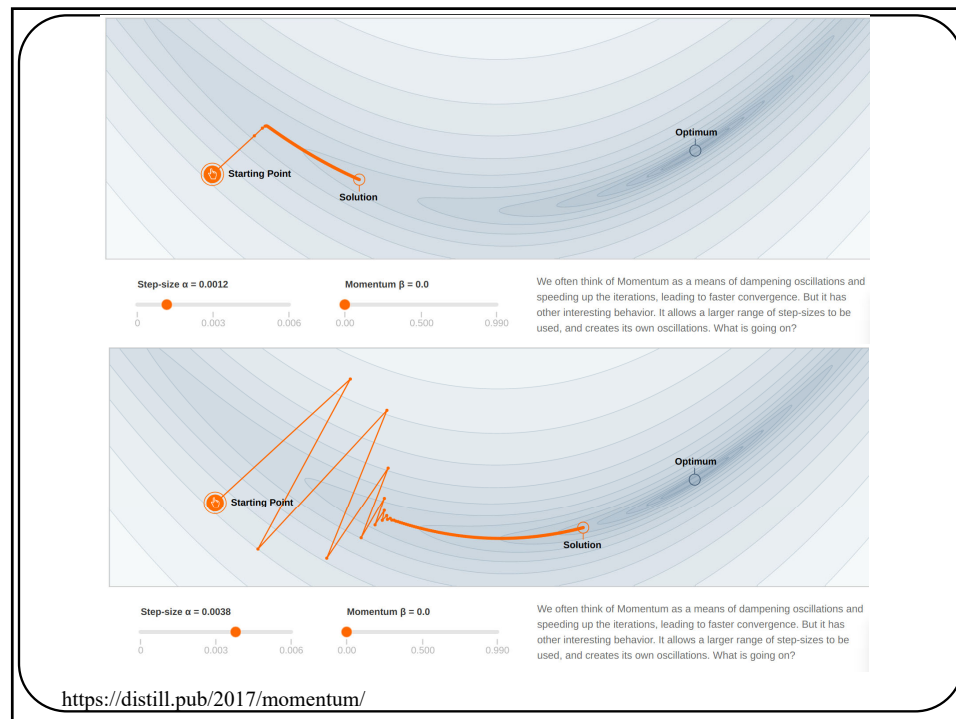
Descente de gradient : **problème**

Qu'arrive-t-il si la fonction de coût (loss) a une pente prononcée dans une direction et moins prononcée dans une autre direction?

Progrès très lent le long de la pente la plus faible et oscillation le long de l'autre direction.



145



146

Descente de gradient + Momentum

Descente de gradient
 $E_D(W)$ stochastique

$$w_{t+1} = w_t - \eta \nabla E_{\tilde{x}_n}(w_t)$$

Descente de gradient
 stochastique + **Momentum**

$$v_{t+1} = \alpha v_t + (1 - \alpha) \nabla E_{\tilde{x}_n}(w_t)$$

$$w_{t+1} = w_t - \eta v_{t+1}$$

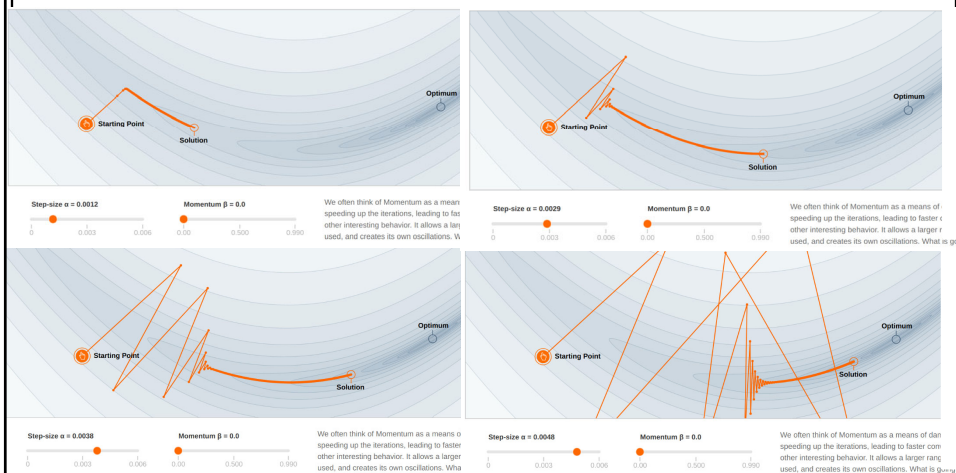
Provient de l'équation de la vitesse

ρ exprime la « friction », en général $\in [0.5, 1]$

147

$$v_{t+1} = \alpha v_t + (1 - \alpha) \nabla E_{\tilde{x}_n}(w_t)$$

$$w_{t+1} = w_t - \eta v_{t+1}$$

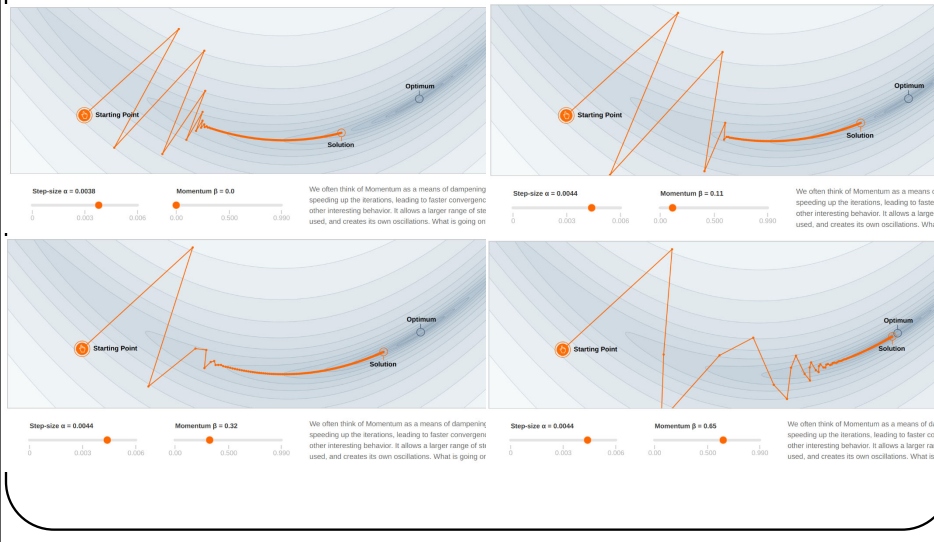


<https://distill.pub/2017/momentum/>

148

$$v_{t+1} = \alpha v_t + (1 - \alpha) \nabla E_{\tilde{x}_n}(W_t)$$

$$w_{t+1} = w_t - \eta v_{t+1}$$



149

AdaGrad (décroissance automatique de η)

Descente de gradient
stochastique

AdaGrad

$$w_{t+1} = w_t - \eta \nabla E_{\tilde{x}_n}(w_t)$$

$$dE_t = \nabla E_{\tilde{x}_n}(w_t)$$

$$m_{t+1} = m_t + |dE_t|$$

$$w_{t+1} = w_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \epsilon} dE_t$$

150

AdaGrad (décroissance automatique de η)

Descente de gradient
stochastique

AdaGrad

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \eta \nabla E_{\tilde{\mathbf{x}}_n}(\mathbf{w}_t)$$

$$dE_t = \nabla E_{\tilde{\mathbf{x}}_n}(\mathbf{w}_t)$$

$$m_{t+1} = m_t + |dE_t|$$

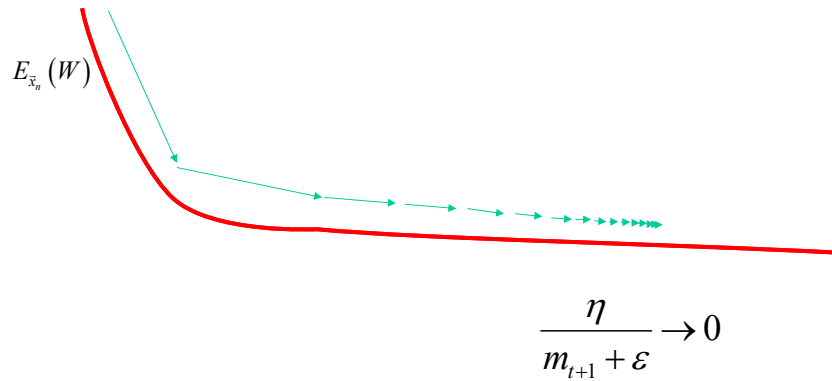
$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \varepsilon} dE_t$$

η décroît sans cesse au fur
et à mesure de l'optimisation

151

AdaGrad (décroissance automatique de η)

Qu'arrive-t-il à long terme?



152

RMSProp (AdaGrad amélioré)

AdaGrad

$$dE_t = \nabla E_{\bar{x}_n}(\mathbf{w}_t)$$

$$m_{t+1} = m_t + |dE_t|$$

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \varepsilon} dE_t$$

RMSProp

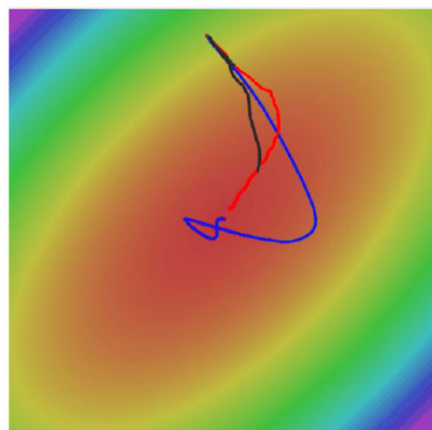
$$dE_t = \nabla E_{\bar{x}_n}(\mathbf{w}_t)$$

$$m_{t+1} = \gamma m_t + (1 - \gamma) |dE_t|$$

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \varepsilon} dE_t$$

η décroît lorsque le gradient est élevé
 η augmente lorsque le gradient est faible

153



— SGD
— SGD+Momentum
— RMSProp

154

Adam (Combo entre Momentum et RMSProp)

Momentum

$$v_{t+1} = \rho v_t + \nabla E_{\tilde{x}_n} (w_t)$$

$$w_{t+1} = w_t - \eta v_{t+1}$$

Adam

$$dE_t = \nabla E_{\tilde{x}_n} (w_t)$$

$$v_{t+1} = \alpha v_t + (1 - \alpha) dE_t$$

$$m_{t+1} = \gamma m_t + (1 - \gamma) |dE_t|$$

$$w_{t+1} = w_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \varepsilon} v_{t+1}$$

155

Adam (Combo entre Momentum et RMSProp)

Momentum

$$v_{t+1} = \rho v_t + \nabla E_{\tilde{x}_n} (w_t)$$

$$w_{t+1} = w_t - \eta v_{t+1}$$

Adam

$$dE_t = \nabla E_{\tilde{x}_n} (w_t)$$

$$v_{t+1} = \alpha v_t + (1 - \alpha) dE_t$$

$$m_{t+1} = \gamma m_t + (1 - \gamma) |dE_t|$$

$$w_{t+1} = w_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \varepsilon} v_{t+1}$$

Momentum

156

Adam (Combo entre Momentum et RMSProp)

RMSProp

$$dE_t = \nabla E_{\vec{x}_n}(\mathbf{w}_t)$$

$$m_{t+1} = \gamma m_t + (1 - \gamma) |dE_t|$$

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \varepsilon} dE_t$$

Adam

$$dE_t = \nabla E_{\vec{x}_n}(\mathbf{w}_t)$$

$$v_{t+1} = \alpha v_t + (1 - \alpha) dE_t$$

$$m_{t+1} = \gamma m_t + (1 - \gamma) |dE_t|$$

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \varepsilon} v_{t+1}$$

RMSProp

157

Adam (Version complète)

$$v_{t=0} = 0$$

$$m_{t=0} = 0$$

for t=1 à num_iterations

for n=0 à N

$$dE_t = \nabla E_{\vec{x}_n}(\mathbf{w}_t)$$

$$v_{t+1} = \alpha v_t + (1 - \alpha) dE_t$$

$$m_{t+1} = \gamma m_t + (1 - \gamma) |dE_t|$$

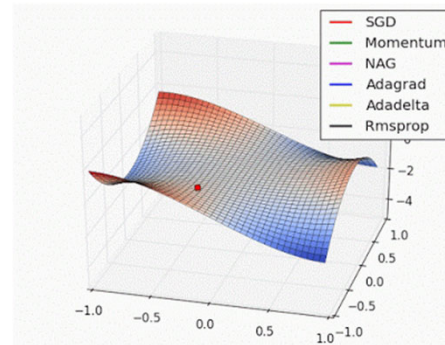
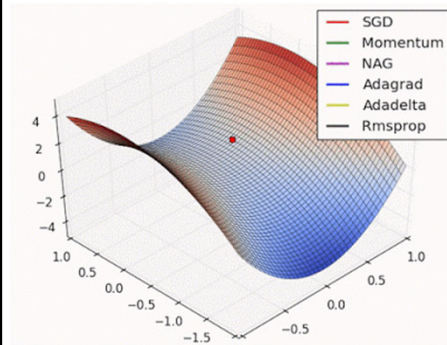
$$v_{t+1} = \frac{v_{t+1}}{1 - \beta_1^t}, m_{t+1} = \frac{m_{t+1}}{1 - \beta_2^t}$$

$$\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.99$$

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \frac{\eta}{m_{t+1} + \varepsilon} v_{t+1}$$

158

Illustrations



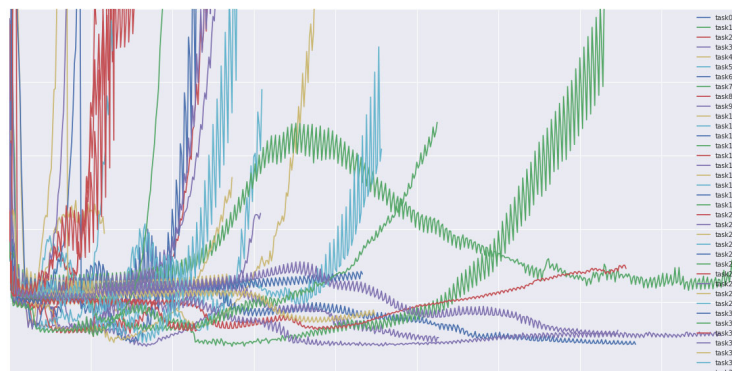
À voir sur :

www.denizyuret.com/2015/03/alec-radfords-animations-for.html

159

Autre excellent survol

<http://ruder.io/optimizing-gradient-descent/>



160